Abitur 2011, Analysis I

Teil 1

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x+5}$

   Maximale Definitionsmenge: $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}25\}$

   Ableitung: $\quad f'(x) = \dfrac{(4x+5)\cdot 2 - (2x+3)\cdot 4}{(4x+5)^2} = \dfrac{8x+10-8x-12}{(4x+5)^2} = -\dfrac{2}{(4x+5)^2}$

2. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1); \quad D_F = \mathbb{R}^+$

   $F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}x^2 \cdot (2 \cdot \dfrac{1}{x} - 0) = x\ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x \ln x = f(x)$

   F ist also eine Stammfunktion von f.

   Ansatz: $\quad F_1(x) = F(x) + C = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1) + C$

   $F_1(1) = 0; \quad \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (2\ln 1 - 1) + C = 0; \quad -\frac{1}{4} + C = 0; \quad C = \frac{1}{4}$

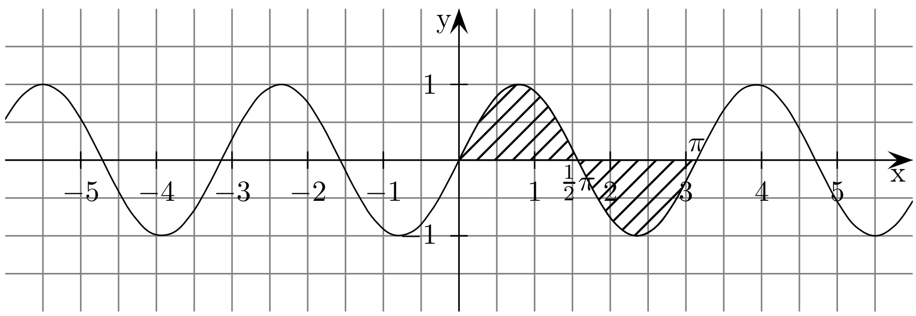
   $F_1(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}$

3. $N(2000) = 6{,}1 \cdot 10^9; \quad N_0 \cdot e^{k(2000-2000)} = 6{,}1 \cdot 10^9; \quad N_0 = 6{,}1 \cdot 10^9$

   $N(2010) = 6{,}9 \cdot 10^9; \quad 6{,}1 \cdot 10^9 \cdot e^{k(2010-2000)} = 6{,}9 \cdot 10^9; \quad e^{10k} = \dfrac{6{,}9}{6{,}1};$

   $10k = \ln \dfrac{6{,}9}{6{,}1}; \quad k = \frac{1}{10} \ln \dfrac{6{,}9}{6{,}1} \approx 0{,}01232$

4. a)



   Das bestimmte Integral $\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$ entspricht einer Flächenbilanz für die Flächenstücke, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen werden. Dabei werden Flächenstücke oberhalb der x-Achse positiv gezählt, Flächenstücke unterhalb der x-Achse dagegen negativ. Wegen der Punktsymmetrie des Graphen bezüglich $(\frac{1}{2}\pi|0)$ haben die beiden Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse den gleichen Inhalt. Daher ergibt die Flächenbilanz den Wert 0.

   b) Stammfunktion: $\quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\cos(2x)) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

   $\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\pi} = \Big(-\frac{1}{2}\cos(2\pi)\Big) - \Big(-\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0)\Big)$

   $= \Big(-\frac{1}{2} \cdot 1\Big) - \Big(-\frac{1}{2} \cdot 1\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Teil 2

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$

   a) Eine Quadratwurzel ist genau dann definiert, wenn der Radikand größer oder gleich 0 ist. Diese Bedingung ($x + 3 \geqq 0$) ist äquivalent zu $x \geqq -3$. Deshalb ist $D_f = [-3; +\infty[$ die maximale Definitionsmenge.

   Aus dem Graphen von $w :\mapsto \sqrt{x}$ geht der Graph von f durch Verschiebung um 3 in negativer x-Richtung (nach links) hervor.

   b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand $d(x)$ der Punkte $P(1{,}5|0)$ und $Q(x|\sqrt{x+3})$:

   $(d(x))^2 = (x-1{,}5)^2 + (\sqrt{x+3} - 0)^2 = x^2 - 3x + 2{,}25 + x + 3 = x^2 - 2x + 5{,}25$

   $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5{,}25}$

   c) $d(x)$ soll minimal sein. Eine notwendige Bedingung dafür ist $d'(x) = 0$.

   $$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+5{,}25}} \cdot (2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5{,}25}}$$

   $$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5{,}25}} = 0; \quad x_E = 1$$

   $y_E = f(1) = \sqrt{1+3} = 2$

   Monotonieverhalten:

	$x < 1$	$x > 1$
$d'(x)$	< 0	> 0
$d(x)$	s.m.a.	s.m.z.

   Der Kurvenpunkt $Q_E(1|2)$ hat von $P(1{,}5|0)$ den kleinsten Abstand.

   d) Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

   Steigung der Tangente im Punkt $Q_E(1|2)$: $m_1 = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$

   Steigung der Geraden PQ_E: $m_2 = \dfrac{2-0}{1-1{,}5} = -4$

   Wegen $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1$ sind die beiden Geraden zueinander senkrecht.

   e) Der Flächeninhalt lässt sich als Summe eines Integrals und eines Dreiecksflächeninhalts berechnen.

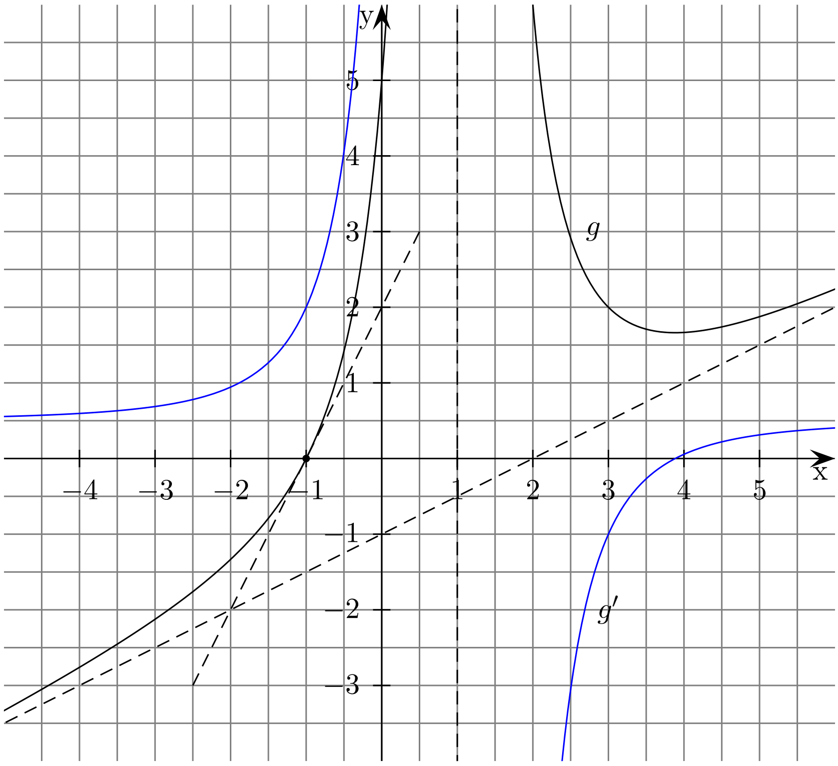
   Stammfunktion: $F(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$

   Integral: $\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1} = \frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-3+3)^{\frac{3}{2}}$

   $= \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{16}{3}$

   Gesamter Flächeninhalt: $A = \frac{16}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 5\frac{5}{6}$

2. a)



$g'(-1) = 2$ (Steigung der eingezeichneten Tangente)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$ (Steigung der Asymptote)

b) Gleichung I kann nicht stimmen, weil die schiefe Asymptote die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ hat und nicht $y = x - 1$.
Gleichung II ist auszuschließen, weil eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegt und keine einfache Polstelle (ohne Vorzeichenwechsel).

c) $h(x) = \ln(g(x))$

$h(x)$ ist genau dann definiert, wenn $g(x) > 0$ gilt.

$D_h =]-1; +\infty[\setminus \{1\} =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

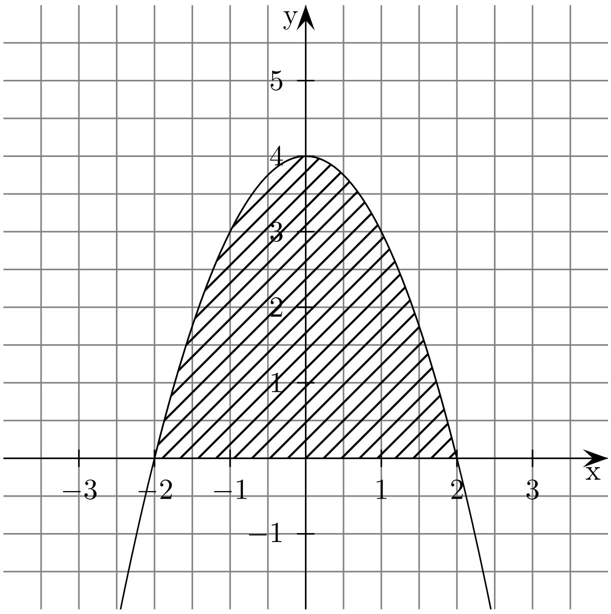
$\lim\limits_{x\to-1} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1} h(x) = +\infty$ (beidseitig); $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$h(x) = 0$ gilt genau dann, wenn $g(x) = 1$ zutrifft. Aus der Zeichnung kann man $x_N \approx -0{,}6$ ablesen.

Abitur 2011, Analysis II

Teil 1

1. $f(x) = 4 - x^2$



Nullstellen: $\quad 4 - x^2 = 0; \quad x_{N1} = -2; \quad x_{N2} = +2$

Flächeninhalt:

$A = \int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2\int\limits_{0}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= 2 \cdot \left[(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3) - (4 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3)\right] = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$

2. $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$

Maximale Definitionsmenge: $\quad D = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$

Stammfunktion allgemein: $\quad F(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2} + 1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + C$

Bestimmung der Integrationskonstante C: $\quad 4 = 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C; \quad 4 = 2 + C; \quad C = 2$

Spezielle Stammfunktion: $\quad F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$

3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}; \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   a) Nullstellen: $\quad \sin x = 0; \quad x = k\pi \quad$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

   b) Symmetrieverhalten: $\quad f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2} = -\dfrac{\sin x}{x^2} = -f(x)$

   Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs

   Grenzwert: $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} = 0$

   (Begründung: $\quad x^2 \to \infty; \quad \sin x$ beschränkt)

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot \cos x - \sin x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x(x\cos x - 2\sin x)}{x^4} = \dfrac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$

(Quotientenregel)

4. Mögliches Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$

Teil 2

1. $f(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} + x$

a) Ableitungen:

$f'(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) + 1 = -3e^{-0{,}5x} + 1$
$f''(x) = -3 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) + 0 = 1{,}5e^{-0{,}5x}$

Extrempunkt:

$-3e^{-0{,}5x} + 1 = 0; \quad e^{-0{,}5x} = \frac{1}{3}; \quad -0{,}5x = \ln\frac{1}{3}; \quad -0{,}5x = -\ln 3$

$x_E = 2\ln 3 \approx 2{,}19722$

$y_E = 6 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 2\ln 3} + 2\ln 3 = 6 \cdot e^{-\ln 3} + 2\ln 3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2\ln 3 = 2 + 2\ln 3 \approx 4{,}19722$

Monotonie:

	$x < 2\ln 3$	$x > 2\ln 3$
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	s.m.a.	s.m.z.

Tiefpunkt $(2\ln 3 | 2 + 2\ln 3)$

Krümmungsverhalten: $f''(x) = 1{,}5\,e^{-0{,}5x} > 0$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

Graph von f überall linksgekrümmt

b) Verhalten für $x \to -\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{6 \cdot e^{-0{,}5x}}_{\to+\infty} \underbrace{+x}_{\to-\infty}) = +\infty$

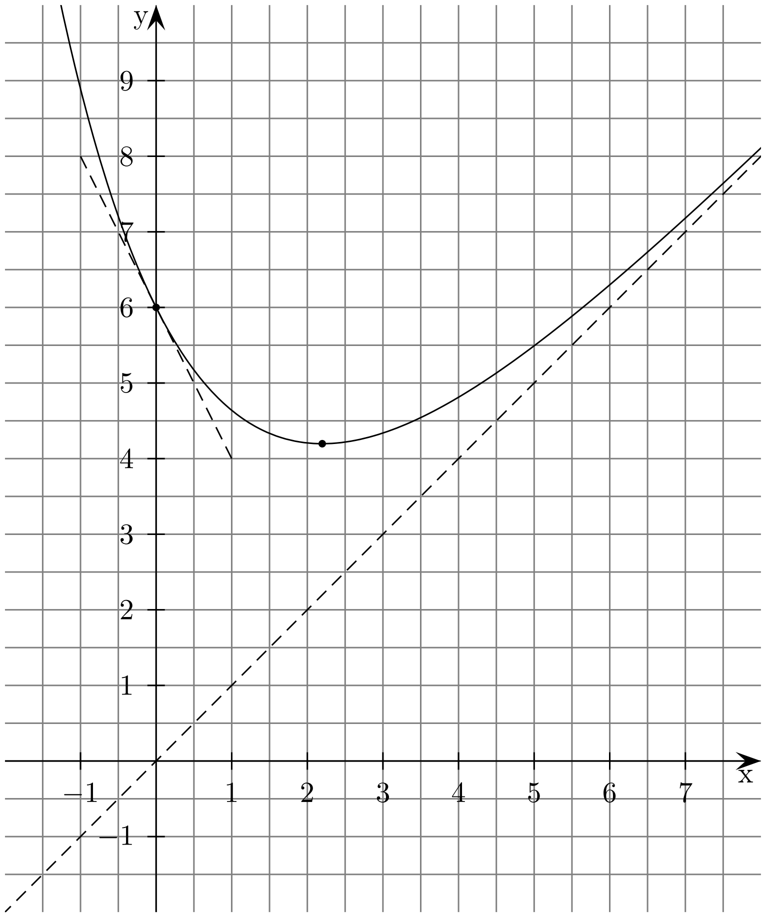
(e-Funktion überwiegt gegenüber Potenzfunktion)

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} (6 \cdot e^{-0{,}5x}) = 0$ wird die Abweichung zwischen $f(x)$ und x beliebig klein. Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ ist daher für $x \to \infty$ eine (schräge) Asymptote des Graphen G_f.

c) Tangentensteigung: $m = f'(0) = -3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0} + 1 = -3 \cdot e^0 + 1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$

Einsetzen in $y = mx + t$: $6 = (-2) \cdot 0 + t; \quad t = 6$

Tangentengleichung: $y = -2x + 6$



2. $h(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} + 1{,}5$

   a) Der Graph von h geht durch folgende geometrische Abbildungen aus dem Graphen der Exponentialfunktion $(x \mapsto e^x)$ hervor:

   1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2 (wegen Faktor 0,5 im Exponenten)
   2. Spiegelung an der y-Achse (wegen Minuszeichen im Exponenten)
   3. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 6 (wegen Faktor 6)
   4. Verschiebung um 1,5 nach oben (wegen Summand 1,5)

   Bemerkung: Die Streckung in y-Richtung muss vor der Verschiebung in y-Richtung ausgeführt werden. Ansonsten kann die Reihenfolge der Abbildungen variiert werden.

   b) Monotonie: Die Schadstoffausstoßrate nimmt im Laufe der Zeit immer mehr ab.

   Grenzwert für $x \to \infty$: Die Schadstoffausstoßrate nähert sich immer mehr dem Wert $1{,}5\frac{\text{mg}}{\text{min}}$.

c) Stammfunktion: $H(x) = 6 \cdot \frac{1}{-0{,}5} e^{-0{,}5x} + 1{,}5x = -12e^{-0{,}5x} + 1{,}5x$

(Merkhilfe S. 3: $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$; F Stammfunktion von f)

$A = \int\limits_0^5 (6e^{-0{,}5x} + 1{,}5)\,dx = \left[-12e^{-0{,}5x} + 1{,}5x\right]_0^5$

$= (-12e^{-0{,}5 \cdot 5} + 1{,}5 \cdot 5) - (-12e^{-0{,}5 \cdot 0} + 1{,}5 \cdot 0)$

$= (-12e^{-2{,}5} + 7{,}5) - (-12e^0 + 0)$

$= -12e^{-2{,}5} + 19{,}5 \approx 18{,}51498 \approx 18{,}5$

Interpretation: Der gesamte Schadstoffausstoß in den ersten fünf Minuten beträgt etwa 18,5 mg.

3. $f_a(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} - a \cdot x; \quad a \in \mathbb{R}^+; \quad D = \mathbb{R}$

a) $f_a(0) = 6 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0} - a \cdot 0 = 6 \cdot e^0 - 0 = 6 \cdot 1 - 0 = 6$ (unabhängig von a)

Alle Kurven der Schar schneiden die y-Achse im Punkt (0|6).

$f_a'(x) = -3\underbrace{e^{-0{,}5x}}_{>0} - \underbrace{a}_{>0} < 0$

Die Graphen aller Funktionen f_a (für $a > 0$) sind im gesamten Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ streng monoton abnehmend.

b) Startwert: $x_0 = 0$

Nächster Näherungswert (Formel siehe Merkhilfe S. 2 mit $n = 0$):

$x_1 = x_0 - \frac{f_a(x_0)}{f_a'(x_0)} = 0 - \frac{f_a(0)}{f_a'(0)} = -\frac{6 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0} - a \cdot 0}{-3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0} - a}$

$= -\frac{6}{-3-a} = -\frac{6}{-(3+a)} = \frac{6}{3+a}$

Abitur 2011, Stochastik I

1. a) Vierfeldertafel (gegebene Zahlen fettgedruckt):

	Oberberg (O)	Niederberg (N)	
Gegner (G)	231	660	891
Keine Einwände ($\overline{G}$)	**27**	1062	**1089**
	258	**1722**	1980

$P_N(G) = \frac{660}{1722} \approx 0{,}38328 \approx 38{,}3\%$

$P_O(G) = \frac{231}{258} \approx 0{,}89535 \approx 89{,}5\%$

b) $p_1 = P(O \cap G) = \frac{231}{1980} \approx 0{,}11667 \approx 11{,}7\%$

$p_2 = P_G(O) = \frac{231}{891} \approx 0{,}25926 \approx 25{,}9\%$

c) Der Zähler ist in beiden Brüchen gleich (Zahl der Anlagengegner in Oberberg). Der Nenner ist beim ersten Bruch die Gesamtzahl der Befragten, beim zweiten Bruch die Zahl der Anlagengegner unter den Befragten. Der Nenner des zweiten Bruchs kann also höchstens so groß sein wie der Nenner des ersten Bruchs; daher ist $p_1 > p_2$ ausgeschlossen.

2. a) X ... Unkosten in Euro

Kategorie	Wahrscheinlichkeit	Unkosten (in Euro)
1	$\frac{1}{10}$	10
2	$\frac{2}{10}$	5
3 oder 4	$\frac{7}{10}$	0

Erwartungswert der Unkosten: $E(X) = \frac{1}{10} \cdot 10 + \frac{2}{10} \cdot 5 + \frac{7}{10} \cdot 0 = 2$

Aus dem Einsatz von 2,50 € und den Unkosten von 2,00 € ergibt sich ein zu erwartender Gewinn von 0,50 € pro Spiel.

b) $P(A) = 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5$

$P(B) = 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 \cdot \binom{10}{5}$

$P(C) = 0{,}1^5 \cdot 0{,}4^5 \cdot \binom{10}{5}$

3. $P(\text{mindestens ein Gegner}) \geqq 0{,}99$

$P(\text{kein Gegner}) \leqq 0{,}01$ (Gegenereignis)

$(1-p)^{10} \leqq 0{,}01 \quad | \sqrt[10]{}$

$1 - p \leqq \sqrt[10]{0{,}01}$

$p \geqq 1 - \sqrt[10]{0{,}01}$

$p \geqq 0{,}36904$

4. H_0: $p \geqq 0{,}55$
H_1: $p < 0{,}55$

$A = \overline{K} = \{k+1; \ldots; 200\}$
$\overline{A} = K = \{0; \ldots; k\}$

$P(\text{Fehler 1. Art}) \leqq 0{,}05$
$P_{0{,}55}(X \leqq k) \leqq 0{,}05$

Wert aus dem Tafelwerk: $\sum\limits_{i=0}^{97} B(200; 0{,}55; i) \approx 0{,}03810$

$k = 97$

$A = \overline{K} = \{98; \ldots; 200\}$
$\overline{A} = K = \{0; \ldots; 97\}$

Der Gemeinderat sieht seine Vermutung genau dann bestätigt, wenn sich mehr als 97 der Befragten gegen die Windkraftanlage aussprechen.

Abitur 2011, Stochastik II

1. a) X ... Zahl der Passagiere, die sich auf dem Hinflug für das vegetarische Menü entscheiden

   $P(20 \leqq X \leqq 25) = \sum\limits_{i=20}^{25} B(200; 0{,}10; i)$

   $= \sum\limits_{i=0}^{25} B(200; 0{,}10; i) - \sum\limits_{i=0}^{19} B(200; 0{,}10; i) \approx 0{,}89954 - 0{,}46554 = 0{,}43400 = 43{,}4\%$

   b) X' ... Zahl der Passagiere, die sich auf dem Rückflug für das vegetarische Menü entscheiden

   $P(X' = 20) = B(240; 0{,}1; 20) = \binom{240}{20} \cdot 0{,}1^{20} \cdot 0{,}9^{220} \approx 0{,}06280 \approx 6{,}3\%$

   c) W ... Ein zufällig ausgewählter Passagier ist weiblich.
   V ... Ein zufällig ausgewählter Passagier nimmt das vegetarische Menü.
   w ... Zahl der weiblichen Passagiere

   $P(W \cap V) = P(W) \cdot P(V)$ (Bedingung für unabhängige Ereignisse)

   $\frac{6}{240} = w \cdot \frac{6+14}{240}; \quad w = 72$

2. a) H_0: $p \leqq 0{,}15$
   H_1: $p > 0{,}15$

   $A = \overline{K} = \{0; \ldots ; k\}$
   $\overline{A} = K = \{k+1; \ldots ; 200\}$

   Y ... Zahl der Passagiere, die ein Premiummenü wünschen

   $P(\text{Fehler 1. Art}) \leqq 0{,}05$

   $P_{0{,}15}(Y \geqq k+1) \leqq 0{,}05$

   Wert aus dem Tafelwerk: $\sum\limits_{i=0}^{38} B(200; 0{,}15; i) \approx 0{,}95020$

   $k = 38$

   $A = \overline{K} = \{0; \ldots ; 38\}$
   $\overline{A} = K = \{39; \ldots ; 200\}$

   Die Fluggesellschaft sieht die Nullhypothese genau dann bestätigt, wenn höchstens 38 der befragten Passagiere ein Premiummenü wünschen.

   b) Eine Festlegung der Nullhypothese wie in der Angabe bedeutet:

   Die Wahrscheinlichkeit, dass sich viele Befragte für ein Premiummenü aussprechen, obwohl in Wirklichkeit höchstens 15 % der Passagiere ein solches Menü wünschen, also die Wahrscheinlichkeit eines unnötigen finanziellen Verlustes, beträgt höchstens 5 %.

   Die Wahrscheinlichkeit für den umgekehrten Fehler, also die Wahrscheinlichkeit eines Imageverlustes durch irrtümlichen Verzicht auf das Premiummenü, kann bei der genannten Festlegung einen Wert von bis zu 95 % erreichen.

   Offensichtlich wird die erstgenannte Fehlermöglichkeit von der Fluggesellschaft als schlimmer empfunden.

3. a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$
$x = P(B \cap K) = P(B) - P(B \cap \overline{K}) = 0{,}96 - 0{,}05 = 0{,}91$

Wortformulierung: Beleuchtung und Klimaanlage funktionieren einwandfrei.

b) Vollständige Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
B	0,91	0,05	0,96
$\overline{B}$	0,03	0,01	0,04
	0,94	0,06	1

$$P_{\overline{B}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{K})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}01}{0{,}04} = 0{,}25 = 25\%$$

c) Gegeben: $P(\overline{K}) = 0{,}04$; $P(\overline{K} \cup \overline{B}) = 0{,}05$; $P_{\overline{K} \cup \overline{B}}(\overline{B}) = 0{,}40$

$P(\overline{K \cap B}) = 0{,}05$ (Gesetz von de Morgan)
$P(K \cap B) = 1 - P(\overline{K \cap B}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ (Gegenereignis)

$$\frac{P(\overline{B} \cap (\overline{K} \cup \overline{B}))}{P(\overline{K} \cup \overline{B})} = \frac{P(\overline{B})}{0{,}05} = 0{,}40; \quad P(\overline{B}) = 0{,}40 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$$

Vierfeldertafel (schon bekannte Wahrscheinlichkeiten fettgedruckt):

	K	$\overline{K}$	
B	**0,95**	0,03	0,98
$\overline{B}$	0,01	0,01	**0,02**
	0,96	**0,04**	**1**

Abitur 2011, Analytische Geometrie I

a) Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 60 - 60 \cdot (-60) \\ 60 \cdot (-80) - (-80) \cdot 60 \\ (-80) \cdot (-60) - 0 \cdot (-80) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix} = 1200 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $3x_1 + 0x_2 + 4x_3 + n_0 = 0$

Einsetzen der Koordinaten von A: $3 \cdot 0 + 0 \cdot 60 + 4 \cdot 0 + n_0 = 0$; $n_0 = 0$

Gleichung der Ebene E: $3x_1 + 4x_3 = 0$

Besondere Lage im Koordinatensystem: Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse und geht durch den Ursprung. Anders ausgedrückt: Die Ebene enthält die x_2-Achse.

Winkel zwischen der Ebene E und der x_1-x_2-Ebene
(Berechnung mit Hilfe von Normalenvektoren):

$$\cos\varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$$

$\varphi \approx 36{,}86990^\circ \approx 36{,}9^\circ$

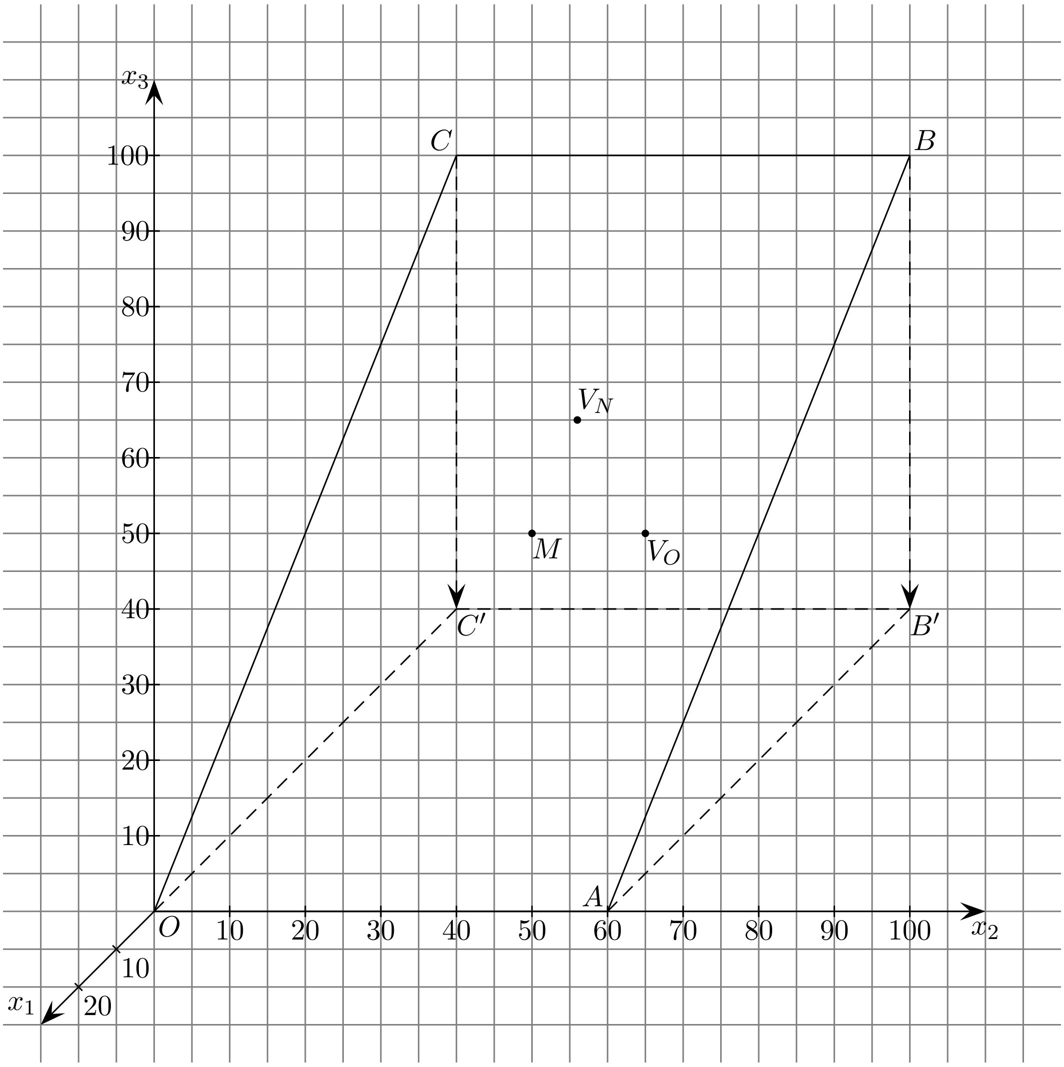
b) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$; $\quad OABC$ ist also ein Parallelogramm.

$$\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-80) + 60 \cdot 0 + 0 \cdot 60 = 0$$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$; $\quad OABC$ ist also ein Rechteck.

Flächeninhalt: $A_{OABC} = \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right| = 60 \cdot 100 = 6000$



c) Vermutung: Es wird der Flächeninhalt der Projektion in die x_1-x_2-Ebene angegeben.

Projektionen der Punkte B und C: $B'(-80|60|0)$; $C'(-80|0|0)$
(Die Punkte O und A liegen bereits in der x_1-x_2-Ebene.)

$\overline{AB'} = \overline{OC'} = 80$ (Einheit m)
Flächeninhalt: $A_{OAB'C'} = 60 \cdot 80 = 4800$ (Einheit m^2)

d) HNF von E: $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}(3x_1 + 4x_3) = 0$; $\frac{1}{5}(3x_1 + 4x_3) = 0$

Einsetzen der Koordinaten aus der Geradengleichung von g:

$d = \frac{1}{5}(3(-20 + 4\lambda) + 4(40 - 3\lambda)) = \frac{1}{5}(-60 + 12\lambda + 160 - 12\lambda) = 20$
(unabhängig von λ)

Alle Punkte der Geraden g (Flugbahn des Hubschraubers) haben von der Ebene E (Hang) den gleichen (vorzeichenbehafteten) Abstand, nämlich 20 m.

e) Lotebene zu g durch M, Ansatz: $4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + n_0 = 0$
Einsetzen der Koordinaten von M: $4 \cdot (-40) + 5 \cdot 30 - 3 \cdot 30 + n_0 = 0;\quad n_0 = 100$
Lotebene zu g durch M: $4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 100 = 0$

Schnitt mit g: $4(-20 + 4\lambda) + 5(40 + 5\lambda) - 3(40 - 3\lambda) + 100 = 0$
$-80 + 16\lambda + 200 + 25\lambda - 120 + 9\lambda + 100 = 0$
$50\lambda + 100 = 0;\quad \lambda = -2$

Lotfußpunkt: $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix};\quad F(-28|30|46)$

Abstand zwischen g und M:

$$d = |\overrightarrow{MF}| = \left| \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 0^2 + 16^2} = 20 \text{ (Einheit m)}$$

Die Ergebnisse von d) und e) stimmen also überein.

f) Östlicher Verankerungspunkt: von M aus 15 LE in positiver x_2-Richtung

$$\overrightarrow{V_O} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix};\quad V_O(-40|45|30)$$

Nördlicher Verankerungspunkt: von M aus 15 LE parallel zu $\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Zugehöriger Einheitsvektor: $\dfrac{1}{\sqrt{(-80)^2 + 0^2 + 60^2}} \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{V_N} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix};\quad V_N(-52|30|39)$$

Abitur 2011, Analytische Geometrie II

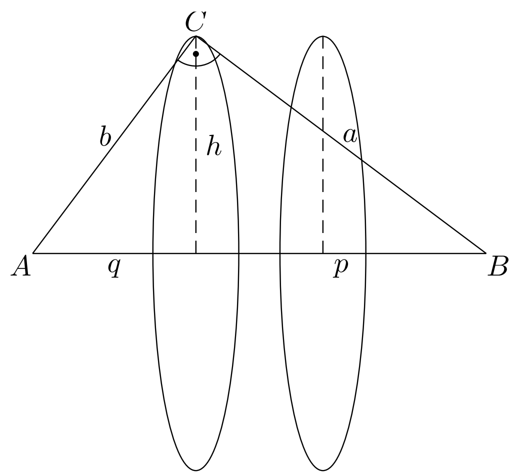
a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 3 \cdot 8 + 6 \cdot (-8) + 6 \cdot 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9; \quad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 4^2} = 12$

$[CA]$ ist also die kürzere Kathete und hat die Länge 9.

b)



C^* liegt

entweder auf dem Kreis, der durch C geht, dessen Ebene senkrecht zu AB ist und dessen Mittelpunkt auf AB liegt,
oder auf dem Kreis, der sich aus dem schon beschriebenen Kreis durch Spiegelung an der Symmetrieebene von A und B ergibt.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lotebene zu AB durch C (Ansatz): $\quad 5x_1 - 14x_2 - 2x_3 + n_0 = 0$

Einsetzen der Koordinaten von C: $\quad 5 \cdot (-2) - 14 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + n_0 = 0; \quad n_0 = 18$

Gleichung der Lotebene: $\quad 5x_1 - 14x_2 - 2x_3 + 18 = 0$

Gerade AB: $\quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung: $\quad 5(1 + 5\lambda) - 14(7 - 14\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 18 = 0$

$5 + 25\lambda - 98 + 196\lambda - 6 + 4\lambda + 18 = 0$

$225\lambda - 81 = 0; \quad \lambda = 0{,}36$

Schnittpunkt (Kreismittelpunkt):

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}36 \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 1{,}96 \\ 2{,}28 \end{pmatrix}; \quad F(2{,}8|1{,}96|2{,}28)$$

Radius der beiden Kreise: $h = \left|\overrightarrow{FC}\right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 1{,}96 \\ 2{,}28 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4{,}8 \\ -0{,}96 \\ -5{,}28 \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{(-4{,}8)^2 + (-0{,}96)^2 + (-5{,}28)^2} = 7{,}2$

Bemerkung: Die elementargeometrische Berechnung erfordert etwas weniger Aufwand:

Nach dem Satz von Pythagoras ergibt sich die Länge der Hypotenuse von Dreieck ABC zu $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

Bezeichnet man die beiden Hypotenusenabschnitte wie üblich mit p und q, so erhält man aus dem Kathetensatz:

$a^2 = cp; \quad p = \frac{a^2}{c} = \frac{12^2}{15} = 9{,}6$

$b^2 = cq; \quad q = \frac{b^2}{c} = \frac{9^2}{15} = 5{,}4$

Mit Hilfe des Höhensatzes lässt sich nun der Radius als Dreieckshöhe errechnen:

$h^2 = pq; \quad h = \sqrt{pq} = \sqrt{9{,}6 \cdot 5{,}4} = 7{,}2$

c) Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 6 \cdot (-8) \\ 6 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-8) - 6 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + n_0 = 0$

Einsetzen der Koordinaten von A: $2 \cdot 1 + 7 - 2 \cdot 3 + n_0 = 0; \quad n_0 = -3$

Gleichung von E (Normalenform): $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

d) $$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{36}{\sqrt{200{,}25 \cdot 3}} = \frac{12}{\sqrt{200{,}25}}$$

$\varphi \approx 57{,}99462° \approx 58{,}0°$

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} \quad \text{(aus Teilaufgabe c))}$$

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{CS} \circ (\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |13{,}5 \cdot 72 + 3 \cdot 36 + (-3) \cdot (-72)| = \frac{1}{6} \cdot 1296 = 216$$

Hinweis: Alternativ zu dieser Lösung könnte man die Grundfläche der Pyramide berechnen (Dreieck ABC, Ergebnis 54) und mit Hilfe der HNF von E die Pyramidenhöhe ermitteln (Ergebnis 12, siehe Teilaufgabe f)). Die Volumenformel für Pyramiden führt dann zum Ergebnis $V = 216$.

e) Da die Pyramiden $ABCP$ und $ABCS$ eine gemeinsame Grundfläche ABC haben und gleiches Volumen besitzen sollen, müssen ihre Höhen bezüglich der Grundebene (also E) gleich groß sein. Die Gerade, auf der P liegen soll, muss also parallel zu E sein und denselben Abstand von E haben wie der Punkt S.

f) Der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Thaleskreis über $[AB]$. Der Umkreismittelpunkt M ist demnach der Mittelpunkt der Hypotenuse $[AB]$.

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad M(3{,}5|0|2)$$

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MS}$ ist kollinear zum Normalenvektor von E und folglich senkrecht zur Ebene E, in der die Grundfläche des Kegels liegt. Daher handelt es sich um einen geraden Kegel.

Radius der Grundfläche (Pythagoras): $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9^2 + 12^2} = 7{,}5$

HNF von E: $\frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3) = 0$

Höhe des Kegels (Abstand des Punktes S von E):
$d = \frac{1}{3}(2 \cdot 11{,}5 + 4 - 2 \cdot (-6) - 3) = 12$

Kegelvolumen: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot 7{,}5^2 \cdot \pi \cdot 12 = 225\pi$

Verhältnis der Volumina: $\dfrac{V_{\text{Kegel}}}{V_{\text{Pyramide}}} = \dfrac{225\pi}{216} \approx 3{,}27249$

Das Volumen des Kegels ist um rund 227,2 % größer als das Volumen der Pyramide.