Beispiele zur Kurvendiskussion
(Gebrochen rationale Funktionen)

Beispiel 1

Diskutiere die durch $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$ gegebene Funktion f.

a) Definitionsbereich:

Der Nenner eines Bruches darf nicht gleich 0 sein. Daher ist $x = -2$ ausgeschlossen.

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Verhalten an der Definitionslücke:

Was ist an der Definitionslücke Besonderes los? Beim Einsetzen von $x = -2$ in die Funktionsgleichung erhält man für den Nenner 0 und für den Zähler $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4 = 6$ (ungleich 0). Daher handelt es sich hier um eine Polstelle (Unendlichkeitsstelle).

Den zugehörigen Linearfaktor $(x + 2)$ könnte man auch in der Form $(x + 2)^1$ schreiben, also mit ungeradem Exponenten. $x = -2$ ist demnach ein ungerader Pol, das heißt ein Pol mit Vorzeichenwechsel.

Senkrechte Asymptote: $x = -2$ (ungerader Pol)

„Ungerader Pol" bedeutet, dass hier ein „Sprung" zwischen $+\infty$ und $-\infty$ stattfindet. Es fragt sich nur, ob dieser Sprung „von unten nach oben" oder „von oben nach unten" geht. Um diese Frage zu klären, bildet man den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x = -2$.

Wenn der Zähler ungleich 0 und der Nenner gleich 0 ist, kann der Grenzwert nur $+\infty$ oder $-\infty$ sein. Beim linksseitigen Grenzwert ($x \xrightarrow{<} -2$) geht der Zähler gegen 6 (positiv), der Nenner gegen 0 (von der negativen Seite her). Daher muss der Grenzwert das Vorzeichen $-$ haben.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{\overbrace{x^2 - 3x - 4}^{\to 6}}{\underbrace{x+2}_{\overset{<}{\to} 0}} = -\infty$$

Linksseitiger Grenzwert für $x \to -2$: $\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$

Beim rechtsseitigen Limes ($x \overset{>}{\to} -2$) geht der Zähler ebenfalls gegen 6 (positiv), aber der Nenner nähert sich der Zahl 0 von der positiven Seite her. Daher kommt für diesen Grenzwert $+\infty$ heraus.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{\overbrace{x^2 - 3x - 4}^{\to 6}}{\underbrace{x+2}_{\overset{>}{\to} 0}} = +\infty$$

Rechtsseitiger Grenzwert für $x \to -2$: $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$

c) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Um die Nullstellen der Funktion f und damit die Schnittpunkte mit der x-Achse zu finden, muss man den Zähler gleich 0 setzen.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Routinemäßig verwendet man bei solchen quadratischen Gleichungen die beliebte „Mitternachtsformel“ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Eleganter wäre allerdings die Zerlegung in Linearfaktoren: $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ x_{N1} &= \frac{3+5}{2} = 4 \\ x_{N2} &= \frac{3-5}{2} = -1 \end{aligned}$$

Hier ist noch zu überprüfen, ob diese x-Werte nicht mit der Definitionslücke $x = -2$ zusammenfallen. Dies ist nicht der Fall. Damit sind die Schnittpunkte mit der x-Achse bekannt.

$$\boxed{\text{Schnittpunkte mit der } x\text{-Achse:} \quad (4|0); \quad (-1|0)}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist festgelegt durch den Funktionswert $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 - 4}{0 + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\boxed{\text{Schnittpunkt mit der } y\text{-Achse:} \quad (0|-2)}$$

d) Verhalten im Unendlichen:

Der Zähler des Funktionsterms ist ein Polynom vom Grad 2, der Nenner ein Polynom vom Grad 1. (Der Grad eines Polynoms ist der höchste vorkommende Exponent der Potenzen von x.)

Wenn – wie hier – der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, dann hat der Funktionsgraph eine schiefe Asymptote. Die Asymptotengleichung erhält man durch Polynomdivision, wobei ein sorgfältiger Umgang mit Plus- und Minuszeichen angebracht ist.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(x^2 & - & 3x & - & 4) & : & (x+2) & = & x - 5 + \dfrac{6}{x+2} \\
x^2 & + & 2x & & & & & & \\
\hline
 & - & 5x & - & 4 & & & & \\
 & - & 5x & - & 10 & & & & \\
\hline
 & & & & 6 & & & &
\end{array}$$

Der Restbruch $\frac{6}{x+2}$ im Ergebnis geht für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0. Das bedeutet, dass der Funktionswert $f(x)$ für x-Werte mit sehr großem Absolutbetrag nur noch sehr wenig von $x - 5$ abweicht. Geometrisch ausgedrückt: Der Graph der Funktion nähert sich immer mehr der Geraden, die durch den Rechenausdruck $x - 5$ gegeben ist.

$$\boxed{\text{Schiefe Asymptote:} \quad y = x - 5}$$

Aus dem Verlauf dieser Asymptote ergeben sich unmittelbar die Grenzwerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$.

$$\text{Grenzwert für } x \to -\infty: \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\text{Grenzwert für } x \to +\infty: \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e) Ableitungen:

Für Aussagen über Monotonie, Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte benötigt man die ersten beiden Ableitungsfunktionen. Da der Funktionsterm ein Bruch ist, kommt die Quotientenregel zum Zuge. Der Nenner der Ableitung ist der bisherige Nenner hoch 2. Den Zähler der Ableitung erhält man nach dem Schema NAZ – ZAN (Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)\cdot(2x-3)-(x^2-3x-4)\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2-3x+4x-6-x^2+3x+4}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{1. Ableitung:} \quad f'(x) = \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2}$$

Auch die zweite Ableitung ist mit Hilfe der Quotientenregel zu berechnen. An der Stelle, an der die Ableitung des Nenners $(x+2)^2$ benötigt wird, muss man zusätzlich die Kettenregel berücksichtigen. (Nachdifferenzieren von $x+2$ ergibt den Faktor 1.)

Bei der weiteren Vereinfachung wäre es ausgesprochen ungeschickt, einfach stur auszumultiplizieren. Stattdessen sollte man unbedingt im Zähler $(x+2)$ ausklammern, um diesen gemeinsamen Faktor von Zähler und Nenner herauskürzen zu können.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x+2)^2\cdot(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)[(x+2)(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2]}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+4}{(x+2)^3} \\ &= \frac{12}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{2. Ableitung:} \quad f''(x) = \frac{12}{(x+2)^3}$$

f) Monotonie und Extrempunkte:

Extrempunkte – soweit vorhanden – findet man, indem man die erste Ableitung gleich 0 setzt.

$$\frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2} = 0$$

Ein Bruch kann nur dann gleich 0 sein, wenn sein Zähler gleich 0 ist.

$$x^2+4x-2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung lässt sich wieder mit der (hoffentlich) bekannten Lösungsformel auflösen. Beim Vereinfachen wendet man das Verfahren des teilweisen Radizierens an, um den Faktor 2 ausklammern und herauskürzen zu können:
$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{6})}{2} = -2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Es wird nun eine Monotonietabelle aufgestellt. In der ersten Zeile stehen die Bereiche der x-Achse, in denen die Ableitung einheitliches Vorzeichen hat. Grundsätzlich könnte sich das Vorzeichen der Ableitung nicht nur an den gerade gefundenen Stellen $x = -2 + \sqrt{6}$ und $x = -2 - \sqrt{6}$ ändern, sondern auch an der Definitionslücke $x = -2$.

	$x < -2 - \sqrt{6}$	$-2 - \sqrt{6} < x < -2$	$-2 < x < -2 + \sqrt{6}$	$x > -2 + \sqrt{6}$
$f'(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0
$f(x)$	str. mon. zun.	str. mon. abn.	str. mon. abn.	str. mon. zun.

Es wäre nicht korrekt, die zweite und die dritte Spalte der Tabelle zusammenzufassen. Salopp ausgedrückt springt der Funktionswert $f(x)$ an der Stelle $x = -2$ von $-\infty$ auf $+\infty$ hoch. Daher ist hier die streng abnehmende Monotonie durchbrochen.

Klar ist inzwischen, dass die Funktion f an der Stelle $x = -2-\sqrt{6}$ ein Maximum annimmt und an der Stelle $x = -2+\sqrt{6}$ ein Minimum. Im Folgenden werden die Koordinaten der beiden Extrempunkte näherungsweise berechnet. (Die exakten Rechenausdrücke für die y-Werte wären relativ kompliziert.)

$$\begin{aligned}
x_{E1} &= -2-\sqrt{6} \approx -4{,}45 \\
x_{E2} &= -2+\sqrt{6} \approx 0{,}45 \\
y_{E1} &\approx -11{,}90 \\
y_{E2} &\approx -2{,}10
\end{aligned}$$

Hochpunkt:	$(-4,45 \mid -11,90)$
Tiefpunkt:	$(0,45 \mid -2,10)$

g) Krümmungsverhalten:

$$f''(x) = \frac{12}{(x+2)^3}$$

Wie man am Zähler sieht, kann die zweite Ableitung $f''(x)$ nicht den Wert 0 annehmen. Das Vorzeichen von $f''(x)$ kann also höchstens an der Definitionslücke wechseln. Daher treten in der Tabelle zum Krümmungsverhalten nur zwei Bereiche auf.

	$x < -2$	$x > -2$
$f''(x)$	< 0	> 0
Graph von f	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

An der Stelle $x = -2$ ändert sich das Krümmungsverhalten. Dennoch liegt kein Wendepunkt vor, da der Funktionswert $f(-2)$ nicht definiert ist.

Wendepunkte: Keine!

h) Symmetrie:

Auf den ersten Blick ist keine Symmetrie erkennbar. Da die Grenzwerte für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ verschieden sind, kommt höchstens Punktsymmetrie in Frage, und zwar nur dann, wenn das Symmetriezentrum zugleich auf beiden Asymptoten (mit den Gleichungen $x = -2$ und $y = x - 5$) liegt. Daher wird zunächst der Schnittpunkt dieser Asymptoten ermittelt.

$x = -2$ eingesetzt in $y = x - 5$: $\quad y = -2 - 5 = -7$

Schnittpunkt der Asymptoten: $\quad (-2|-7)$

Allgemeine Bedingung für Punktsymmetrie bezüglich $(x_0|y_0)$:

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2y_0$$

Diese Bedingung wird nun für $x_0 = -2$ und $y_0 = -7$ überprüft. Zweckmäßigerweise verwendet man hier das Ergebnis der Polynomdivision $f(x) = x - 5 + \frac{6}{x+2}$; andernfalls wäre die folgende Rechnung aufwendiger.

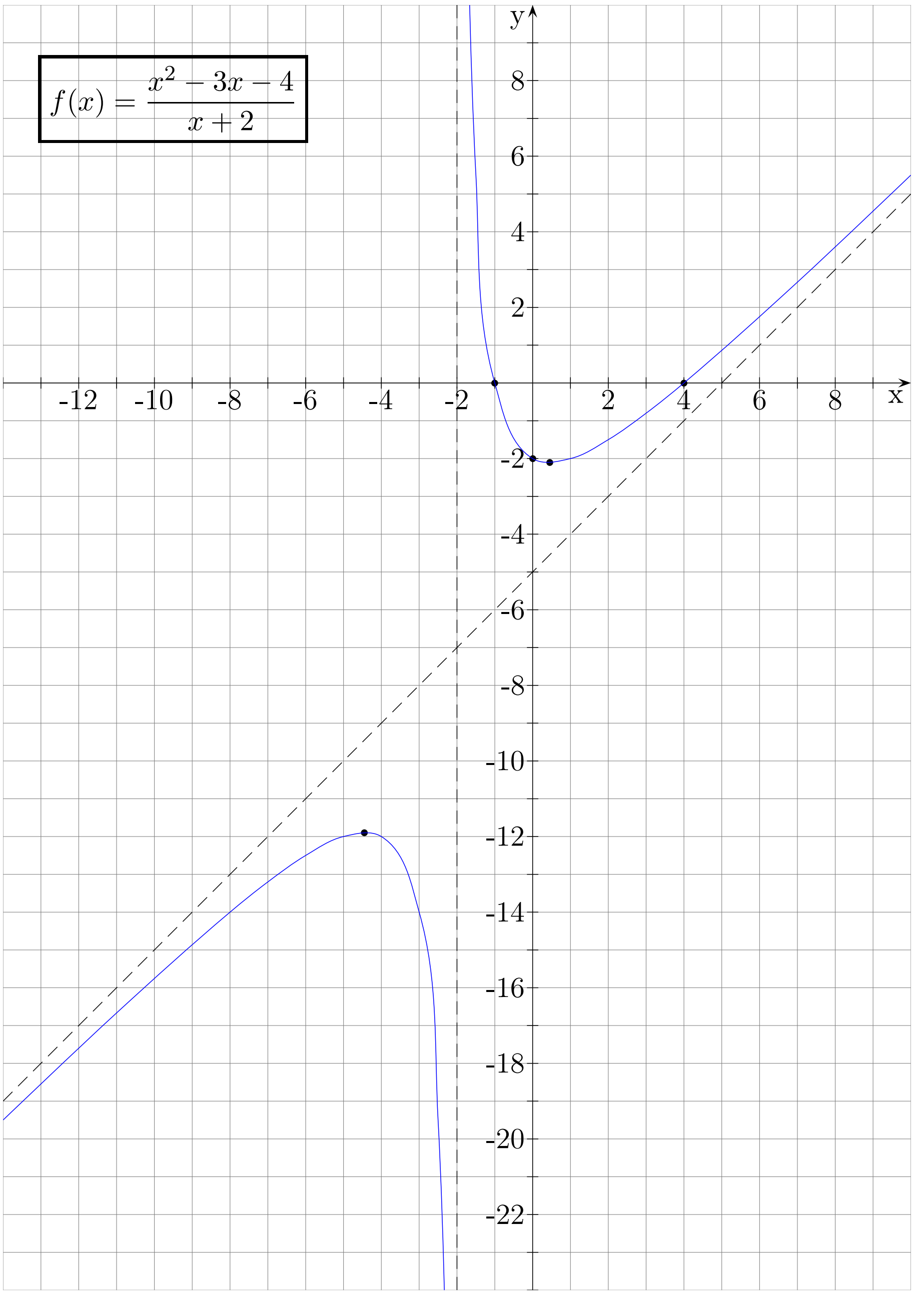
$$\begin{aligned} & f(-2-h) + f(-2+h) \\ = \quad & (-2-h) - 5 + \frac{6}{(-2-h)+2} + (-2+h) - 5 + \frac{6}{(-2+h)+2} \\ = \quad & -14 - \frac{6}{h} + \frac{6}{h} = -14 = 2 \cdot (-7) \end{aligned}$$

Punktsymmetrie bezüglich des Punktes $(-2|-7)$

i) Wertetabelle für $-14 \leqq x \leqq +10$:

x	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6
y	$-19{,}5$	$-18{,}55$	$-17{,}6$	$-16{,}67$	$-15{,}75$	$-14{,}86$	-14	$-13{,}2$	$-12{,}5$
x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	0	1
y	-12	-12	-14	$-19{,}5$	–	$5{,}5$	0	-2	-2
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$-1{,}5$	$-0{,}8$	0	$0{,}86$	$1{,}75$	$2{,}67$	$3{,}6$	$4{,}55$	$5{,}5$

j) Graph der Funktion:



Beispiel 2

Diskutiere die durch $f(x) = \dfrac{|x+1|}{|x|-1}$ gegebene Funktion f.

a) Definitionsbereich:

$|x|$ darf nicht gleich 1 sein, da sonst der Nenner den Wert 0 hätte. Folglich sind $x = -1$ und $x = +1$ ausgeschlossen.

Definitionsbereich: $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b) Verhalten an der Definitionslücke $x = +1$:

Für $x \to +1$ konvergiert der Zähler gegen 2, der Nenner gegen 0. Daher ist $x = +1$ eine Polstelle, das heißt eine Unendlichkeitsstelle. Weil $|x| + 1$ gleichwertig ist zu $(|x| + 1)^1$ (ungerader Exponent!), handelt es sich um einen ungeraden Pol (gekennzeichnet durch einen Vorzeichenwechsel).

Senkrechte Asymptote: $\quad x = +1$ (ungerader Pol)

Um zu erkennen, auf welcher Seite die Funktionswerte gegen $+\infty$ beziehungsweise $-\infty$ gehen, muss man die Vorzeichen von Zähler und Nenner betrachten. Der Zähler hat den positiven Grenzwert 2, während der Nenner gegen 0 geht, und zwar beim linksseitigen Grenzwert ($x \overset{<}{\to} +1$) von der negativen Seite her und beim rechtsseitigen Grenzwert ($x \overset{>}{\to} +1$) von der positiven Seite her.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} +1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} +1} \frac{\overbrace{|x+1|}^{\to 2}}{\underbrace{|x|-1}_{\overset{<}{\to} 0}} = -\infty$$

Linksseitiger Grenzwert für $x \to +1$: $\quad \lim_{x \overset{<}{\to} +1} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} +1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} +1} \frac{\overbrace{|x+1|}^{\to 2}}{\underbrace{|x|-1}_{\overset{>}{\to} 0}} = +\infty$$

Rechtsseitiger Grenzwert für $x \to +1$: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} +1} f(x) = +\infty$

Die Untersuchung des Verhaltens an der anderen Definitionslücke ($x = -1$) wird auf später verschoben, da in diesem Fall Zähler und Nenner den Grenzwert 0 haben.

c) Nullstellen:

Ein Bruch kann nur dann gleich 0 sein, wenn sein Zähler den Wert 0 hat. Diese Bedingung ($|x+1| = 0$) führt auf $x + 1 = 0$ und damit auf $x = -1$. Dies ist jedoch keine Nullstelle, denn der Funktionswert $f(-1)$ ist wegen Division durch 0 nicht definiert. Was wirklich an der Stelle $x = -1$ los ist, wird sich später zeigen.

Nullstellen: Keine!

d) Betragsfreie Schreibweise:

Wenn sich im Funktionsterm Absolutbeträge befinden, ist es angebracht, diesen Term betragsfrei zu schreiben. Dies erfordert eine Fallunterscheidung. Als Intervallgrenzen für diese Fallunterscheidung muss man diejenigen x-Werte betrachten, für die sich zwischen zusammengehörigen Betragsstrichen der Wert 0 ergibt (hier $x = -1$ und $x = 0$). Außerdem kommen die Definitionslücken ($x = -1$ und $x = +1$) als Intervallgrenzen in Frage.

1. Fall ($x < -1$):

Da zwischen den Betragsstrichen von $|x + 1|$ etwas Negatives steht, ist dieser Betrag entgegengesetzt gleich zu $(x + 1)$. Entsprechendes gilt für den Betrag $|x|$, der durch $-x$ ersetzt werden kann.

$$f(x) = \frac{|\overbrace{x+1}^{<0}|}{|\underbrace{x}_{<0}| - 1} = \frac{-(x+1)}{-x-1} = \frac{-x-1}{-x-1} = 1$$

2. Fall ($-1 < x \leqq 0$):

Die Zahl 0 wird willkürlich zu diesem Fall gerechnet. Unter der gegebenen Voraussetzung ist $x + 1$ positiv, sodass die Betragsstriche in $|x + 1|$ unnötig sind. $|x|$ dagegen ist wie im ersten Fall gleichwertig zu $-x$.

$$f(x) = \frac{|\overbrace{x+1}^{>0}|}{|\underbrace{x}_{<0}| - 1} = \frac{x+1}{-x-1} = \frac{x+1}{-(x+1)} = -1$$

3. Fall ($0 < x < 1$):

Nun ist sowohl $x+1$ als auch x positiv. Die Beträge können also weggelassen werden.

$$f(x) = \frac{|\overbrace{x+1}^{>0}|}{|\underbrace{x}_{>0}|-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

4. Fall ($x > 1$):

Hier gilt die gleiche Überlegung wie im dritten Fall.

$$f(x) = \frac{|\overbrace{x+1}^{>0}|}{|\underbrace{x}_{>0}|-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Betragsfreie Schreibweise:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x < -1 \\ -1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

e) Verhalten im Unendlichen:

Wie die betragsfreie Schreibweise (Fall $x < -1$) unmittelbar erkennen lässt, ergibt sich für $x \to -\infty$ der Grenzwert $+1$.

Grenzwert für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Für den Grenzwert $x \to +\infty$ ist der Fall $x > 1$ zu betrachten. Man erhält den Limes, indem man durch die Potenz von x mit dem höchsten Exponenten kürzt, also durch $x^1 = x$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Grenzwert für } x \to +\infty: \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Aus diesen Grenzwerten sieht man, dass sich der Graph für $x \to -\infty$ beziehungsweise $x \to +\infty$ immer mehr der waagrechten Geraden mit der Gleichung $y = 1$ annähert.

$$\text{Waagrechte Asymptote:} \quad y = 1$$

f) Ableitungen:

Für die Untersuchung von Monotonie- und Krümmungsverhalten benötigt man die ersten beiden Ableitungen. Hier sollte die betragsfreie Schreibweise verwendet werden. Für $x < -1$ und $-1 < x < 0$ ist jeweils eine konstante Funktion zu differenzieren; hier ist die Ableitung also gleich 0. In den beiden anderen Fällen ($0 < x < 1$ und $x > 1$) liefert die Quotientenregel das Ergebnis.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad \text{für } x > 0, x \neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{1. Ableitung:} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } -1 < x < 0 \\ -\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ -\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Auch bei der zweiten Ableitung kommt in den Fällen $0 < x < 1$ und $x > 1$ die Quotientenregel zum Zuge. Das Ergebnis lässt sich dadurch vereinfachen, dass man den Faktor $(x - 1)$ herauskürzt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)^2\cdot 0 - (-2)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} \\ &= \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \quad \text{für } x > 0, x \neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{2. Ableitung:} \qquad f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } -1 < x < 0 \\ \dfrac{4}{(x-1)^3} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{4}{(x-1)^3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

g) Monotonie:

Am Vorzeichen der ersten Ableitung erkennt man das Monotonieverhalten in den verschiedenen Bereichen.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$= 0$	$= 0$	< 0	< 0
$f(x)$	konstant	konstant	str. mon. abn.	str. mon. abn.

Die beiden letzten Spalten dürfen keinesfalls zusammengefasst werden. Da an der Stelle $x = 1$ ein „Aufwärtssprung“ von $-\infty$ nach $+\infty$ stattfindet, kann nicht von streng monotonem Abnehmen gesprochen werden.

h) Krümmungsverhalten:

Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung ist das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen ersichtlich.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$= 0$	$= 0$	< 0	> 0
Graph von f	geradlinig	geradlinig	rechtsgekr.	linksgekr.

Der Wechsel zwischen Rechts- und Linkskrümmung an der Stelle $x = 1$ fällt auf eine Definitionslücke. Der Graph von f hat daher keinen Wendepunkt.

Wendepunkte: Keine!

i) Symmetrie:

Die beiden geradlinigen Abschnitte des Funktionsgraphen haben keine Gegenstücke auf der anderen Seite. Symmetrie ist folglich auszuschließen.

Es liegt keine Symmetrie vor.

j) Verhalten an der Stelle $x = -1$:

Für $x \to -1$ gehen sowohl der Zähler des Funktionsterms ($|x+1|$) als auch der Nenner ($|x|-1$) gegen 0. Die beiden einseitigen Grenzwerte für $x \to -1$ erhält man mit Hilfe der betragsfreien Schreibweise (Fall $x < -1$ beziehungsweise $-1 < x \leqq 0$).

$$\begin{aligned}\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) &= \lim_{x \overset{<}{\to} -1} 1 = 1 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} -1} (-1) = -1\end{aligned}$$

Würden die beiden Grenzwerte übereinstimmen, so läge eine stetig behebbare Definitionslücke vor. Die Ungleichheit zeigt, dass der Graph an dieser Stelle „einen Sprung macht“.

Linksseitiger Grenzwert für $x \to -1$: $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = 1$

Rechtsseitiger Grenzwert für $x \to -1$: $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -1$

Die Definitionslücke an der Stelle $x = -1$ ist *nicht* stetig behebbar.

k) Verhalten an der Stelle $x = 0$:

Auch hier verwendet man zweckmäßigerweise die betragsfreie Schreibweise. Zunächst wird durch Vergleich des Funktionswertes mit den beiden einseitigen Grenzwerten die Stetigkeit überprüft.

$$\begin{aligned}f(0) &= -1 \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) &= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (-1) = -1 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

Linksseitiger Grenzwert für $x \to 0$: $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1$

Rechtsseitiger Grenzwert für $x \to 0$: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -1$

Funktionswert: $f(0) = -1$

f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

Wenn eine Funktion an einer Stelle stetig ist, braucht sie dort noch lange nicht differenzierbar zu sein. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft ermittelt man die beiden einseitigen Grenzwerte der Ableitungsfunktion.

$$\begin{aligned}\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) &= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} 0 = 0 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) = -\frac{2}{(-1)^2} = -2\end{aligned}$$

f ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

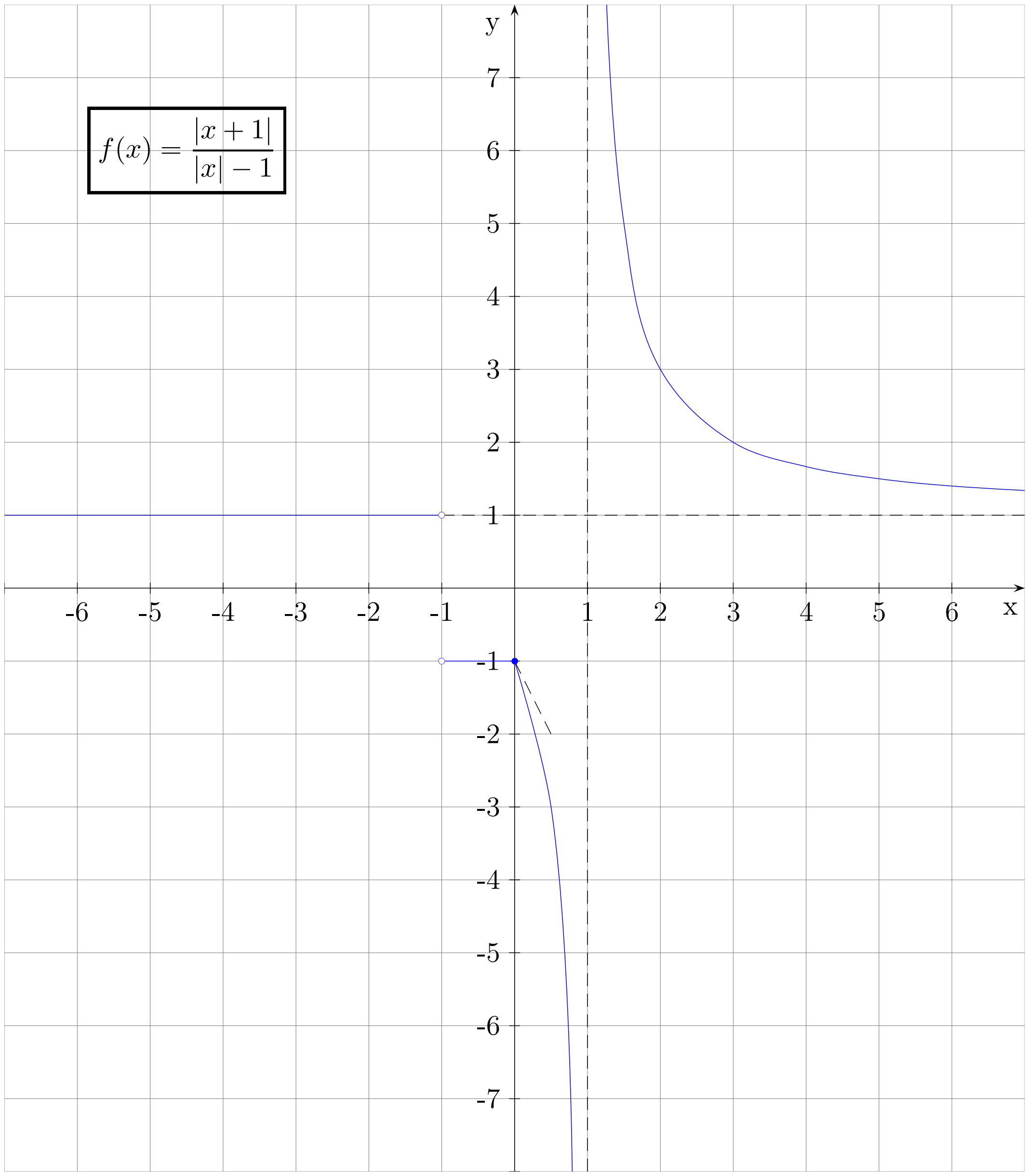
Die Abweichung zwischen $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x)$ beweist, dass der Graph im Punkt $(0|-1)$ einen „Knick“ hat. Der zugehörige Winkel lässt sich leicht berechnen: Auf der linken Seite verläuft der Graph waagrecht. Rechtsseitig geht der Graph im 63°-Winkel relativ zur Waagrechten nach rechts unten (wegen $\tan(-63°) \approx -2$; Taschenrechnereingabe Shift|tan). Der Knickwinkel ergibt sich aus $180° - 63°$.

Knickwinkel im Punkt $(0|-1)$: etwa 117°

l) Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-1	—	3	2	1,67	1,5	1,4	1,33	1,29	1,25	1,22

m) Graph der Funktion:



Beispiel 3

Diskutiere die durch $f_a(x) = \dfrac{1-x^2}{2(x-a)}$ gegebene Kurvenschar.

a) Fallunterscheidung bezüglich des Parameters a:

Diskussion einer Kurvenschar bedeutet, dass man zugleich die Eigenschaften unendlich vieler Kurven untersucht. Zu jedem Wert des Parameters a gehört eine eigene Funktion f_a und damit eine eigene Kurve.

Bei etlichen Untersuchungen ist es nötig, eine Fallunterscheidung bezüglich des Parameters a vorzunehmen. Da der Zähler des Funktionsterms gemäß $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$ zerlegt werden kann, kürzt sich in den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ der im Nenner enthaltene Faktor $x - a$ heraus.

Fallunterscheidung bezüglich a:

$a < -1; \quad a = -1; \quad -1 < a < +1; \quad a = +1; \quad a > 1$

b) Definitionsbereich:

$x = a$ ist ausgeschlossen, da sonst der Nenner gleich 0 wäre.

Definitionsbereich: $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$

c) Verhalten an der Definitionslücke:

Die oben erwähnte Fallunterscheidung ist hier wichtig. In den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ ergibt sich jeweils eine stetig behebbare Definitionslücke, da man den Linearfaktor $(x - a)$ herauskürzen kann. In den anderen Fällen liegt jeweils ein ungerader Pol (mit Vorzeichenwechsel) vor.

1. Fall ($a < -1$): Ungerader Pol

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f_a(x) = +\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f_a(x) = -\infty$

2. Fall ($a = -1$): Stetig behebbare Definitionslücke

Beidseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to a} f_a(x) = \lim\limits_{x \to -1} f_{-1}(x) = +1$

3. Fall ($-1 < a < +1$): Ungerader Pol

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f_a(x) = -\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f_a(x) = +\infty$

4. Fall ($a = +1$): Stetig behebbare Definitionslücke

Beidseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to a} f_a(x) = \lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = -1$

5. Fall ($a > +1$): Ungerader Pol

Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f_a(x) = +\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f_a(x) = -\infty$

d) Nullstellen:

Nullsetzen des Zählers $1 - x^2$ ergibt, dass als Nullstellen nur $x = -1$ und $x = +1$ in Frage kommen. In den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ stimmt allerdings einer dieser Werte mit der Definitionslücke a überein, sodass dann nur eine Nullstelle vorliegt.

1. Fall ($a < -1$):
Zwei Nullstellen ($x_{N1} = -1$ und $x_{N2} = 1$)

2. Fall ($a = -1$):
Eine Nullstelle ($x_N = 1$)

3. Fall ($-1 < a < +1$):
Zwei Nullstellen ($x_{N1} = -1$ und $x_{N2} = 1$)

4. Fall ($a = +1$):
Eine Nullstelle ($x_N = -1$)

5. Fall ($a > +1$):
Zwei Nullstellen ($x_{N1} = -1$ und $x_{N2} = 1$)

e) Verhalten im Unendlichen:

Das Zählerpolynom ist vom Grad 2, das Nennerpolynom vom Grad 1. Weil der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad, muss es eine schiefe Asymptote geben, deren Gleichung sich durch Polynomdivision bestimmen lässt.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(-x^2 & + & 0x & + & 1) & : & (2x-2a) = -\frac{1}{2}\,x - \frac{a}{2} + \frac{1-a^2}{2x-2a} \\
\underline{-x^2} & \underline{+} & \underline{ax} & & & & \\
 & & -ax & + & 1 & & \\
 & & \underline{-ax} & \underline{+} & \underline{a^2} & & \\
 & & & & 1-a^2 & &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Schiefe Asymptote:} \quad y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{a}{2}}$$

In den Sonderfällen $a = -1$ und $a = +1$ stimmt der Graph sogar – abgesehen von der Definitionslücke – mit der Asymptote überein.

Auch die Grenzwerte von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$ lassen sich aus der Asymptotengleichung folgern.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Grenzwert für } x \to -\infty: & \lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty \\ \text{Grenzwert für } x \to +\infty: & \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty \end{array}}$$

f) Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_a{}'(x) &= \frac{2(x-a)\cdot(-2x) - (1-x^2)\cdot 2}{[2(x-a)]^2} \\
&= \frac{(2x-2a)(-2x) - (2-2x^2)}{4(x-a)^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 4ax - 2 + 2x^2}{4(x-a)^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 4ax - 2}{4(x-a)^2} \\
&= \frac{2(-x^2 + 2ax - 1)}{4(x-a)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2ax - 1}{2(x-a)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{1. Ableitung:} \quad f_a{}'(x) = \frac{-x^2+2ax-1}{2(x-a)^2} \quad \text{für } x \neq a}$$

Diesen Rechenausdruck leitet man erneut ab, um die zweite Ableitung zu erhalten. Da die erste Ableitung insgesamt ein Quotient ist, verwendet man die Quotientenregel: Der Nenner ergibt sich als Quadrat des bisherigen Nenners, den Zähler setzt man nach dem Schema NAZ - ZAN (Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners) an. Bei der Ableitung des bisherigen Nenners benötigt man die Kettenregel; der Faktor 1 entsteht durch Nachdifferenzieren.

$$\begin{aligned} f_a{}''(x) &= \frac{2(x-a)^2 \cdot (-2x+2a) - (-x^2+2ax-1) \cdot 2 \cdot 2(x-a) \cdot 1}{(2(x-a)^2)^2} \\ &= \frac{2(x-a)^2 \cdot 2(-x+a) - (-x^2+2ax-1) \cdot 4(x-a)}{4(x-a)^4} \end{aligned}$$

Typisch für die zweite Ableitung einer gebrochen rationalen Funktion ist, dass sich – neben dem Faktor 4 – der Faktor $(x-a)$ herauskürzen lässt. Daher wird nun im Zähler $4(x-a)$ ausgeklammert. (Auf keinen Fall sollte man an dieser Stelle der Rechnung ausmultiplizieren!)

$$\begin{aligned} f_a{}''(x) &= \frac{4(x-a)\left[(x-a)(-x+a) - (-x^2+2ax-1)\right]}{4(x-a)^4} \\ &= \frac{(x-a)(-x+a) - (-x^2+2ax-1)}{(x-a)^3} \\ &= \frac{-x^2+2ax-a^2+x^2-2ax+1}{(x-a)^3} \\ &= \frac{1-a^2}{(x-a)^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{2. Ableitung:} \quad f_a{}''(x) = \frac{1-a^2}{(x-a)^3} \quad \text{für } x \neq a}$$

g) Monotonie:

Zunächst wird der Zähler des Bruchterms für $f_a{}'(x)$ gleich 0 gesetzt, um Punkte mit waagrechter Tangente zu finden.

$$-x^2+2ax-1 \quad = \quad 0$$

Die Lösung ergibt sich aus der Formel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ für quadratische Gleichungen.

$$\begin{aligned} x_{E1,E2} &= \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{-2} = a \mp \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{für } |a| > 1 \end{aligned}$$

Für $a = \pm 1$ existieren keine Punkte mit waagrechter Tangente, da die Lösung mit der Definitionslücke übereinstimmt. Auch für $-1 < a < +1$ gibt es keine Punkte mit waagrechter Tangente, weil die angegebene Lösung in diesem Fall nicht definiert ist.

Beim Aufstellen der Monotonietabelle muss auch die Definitionslücke $x = a$ als Intervallgrenze berücksichtigt werden.

1. Fall ($a < -1$):

	$x < a - \sqrt{a^2 - 1}$	$a - \sqrt{a^2 - 1} < x < a$
$f_a{}'(x)$	< 0	> 0
$f_a(x)$	str. mon. abn.	str. mon. zun.

	$a < x < a + \sqrt{a^2 - 1}$	$x > a + \sqrt{a^2 - 1}$
$f_a{}'(x)$	> 0	< 0
$f_a(x)$	str. mon. zun.	str. mon. abn.

2. bis 4. Fall ($-1 \leqq a \leqq +1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a{}'(x)$	< 0	< 0
$f_a(x)$	str. mon. abn.	str. mon. abn.

5. Fall ($a > 1$):

	$x < a - \sqrt{a^2-1}$	$a - \sqrt{a^2-1} < x < a$
$f_a{}'(x)$	< 0	> 0
$f_a(x)$	str. mon. abn.	str. mon. zun.
	$a < x < a + \sqrt{a^2-1}$	$x > a + \sqrt{a^2-1}$
$f_a{}'(x)$	> 0	< 0
$f_a(x)$	str. mon. zun.	str. mon. abn.

h) Extrempunkte:

Die y-Koordinaten der Extrempunkte erhält man, indem man die gefundenen x-Werte in die Funktionsgleichung einsetzt.

$$y_{E1,E2} = \frac{1-(a\mp\sqrt{a^2-1})^2}{2\left[(a\mp\sqrt{a^2-1})-a\right]} = \frac{1-a^2\pm 2a\sqrt{a^2-1}-a^2+1}{\mp 2\sqrt{a^2-1}}$$

$$= \frac{2-2a^2\pm 2a\sqrt{a^2-1}}{\mp 2\sqrt{a^2-1}} = \frac{-(a^2-1)\pm a\sqrt{a^2-1}}{\mp\sqrt{a^2-1}} = \pm\sqrt{a^2-1}-a$$

1. Fall ($a < -1$):

Tiefpunkt $(a-\sqrt{a^2-1}\,|-a+\sqrt{a^2-1})$
Hochpunkt $(a+\sqrt{a^2-1}\,|-a-\sqrt{a^2-1})$

2. bis 4. Fall ($-1 \leqq a \leqq +1$):

Keine Extrempunkte!

5. Fall ($a > +1$):

Tiefpunkt $(a-\sqrt{a^2-1}\,|-a+\sqrt{a^2-1})$
Hochpunkt $(a+\sqrt{a^2-1}\,|-a-\sqrt{a^2-1})$

i) Ortskurve der Hoch- und Tiefpunkte:

Aus den berechneten Koordinaten der für $a < -1$ oder $a > 1$ existierenden Extrempunkte ist sofort zu erkennen, dass x- und y-Koordinate entgegengesetzt gleich sind. Die Punkte liegen also auf der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten ($y = -x$).

Ortskurve der Hoch- und Tiefpunkte: $\quad y = -x$

j) Krümmungsverhalten:

Sofern nicht $a = -1$ oder $a = +1$ gilt, hat der Graph von f_a keine Flachpunkte, also keine Punkte, an denen die zweite Ableitung gleich 0 ist. Insbesondere gibt es für $a \neq -1$, $a \neq +1$ keine Wendepunkte.

Das Vorzeichen der 2. Ableitung und damit das Krümmungsverhalten ist ohne Weiteres erkennbar.

1. Fall ($a < -1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a''(x)$	> 0	< 0
Graph von f_a	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt

2. Fall ($a = -1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a''(x)$	$= 0$	$= 0$
Graph von f_a	geradlinig	geradlinig

3. Fall ($-1 < a < +1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a''(x)$	< 0	> 0
Graph von f_a	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

4. Fall ($a = +1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a''(x)$	$= 0$	$= 0$
Graph von f_a	geradlinig	geradlinig

5. Fall ($a > +1$):

	$x < a$	$x > a$
$f_a''(x)$	> 0	< 0
Graph von f_a	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt

k) Symmetrie:

Da die Graphen der Scharfunktionen schiefe (also nicht waagrechte) Asymptoten besitzen, ist höchstens Punktsymmetrie möglich. Nur im Fall $a = 0$ liegt Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs vor – erkennbar an der Bedingung $f_a(-x) = -f_a(x)$. Das Kriterium für Punktsymmetrie bezüglich eines beliebigen Punktes $(x_0|y_0)$ lautet:

$f_a(x_0 + h) + f_a(x_0 - h) = 2y_0$

Als Wert für x_0 kommt nur a in Frage, da die einzige senkrechte Asymptote durch das Symmetriezentrum gehen muss, sofern dieses existiert. Diese Überlegungen führen zum folgenden Ansatz:

$$f_a(a+h) + f_a(a-h) = \frac{1-(a+h)^2}{2(a+h-a)} + \frac{1-(a-h)^2}{2(a-h-a)}$$

$$= \frac{1-a^2-2ah-h^2}{2h} + \frac{1-a^2+2ah-h^2}{-2h}$$

$$= \frac{1-a^2-2ah-h^2-1+a^2-2ah+h^2}{2h} = \frac{-4ah}{2h} = -2a$$

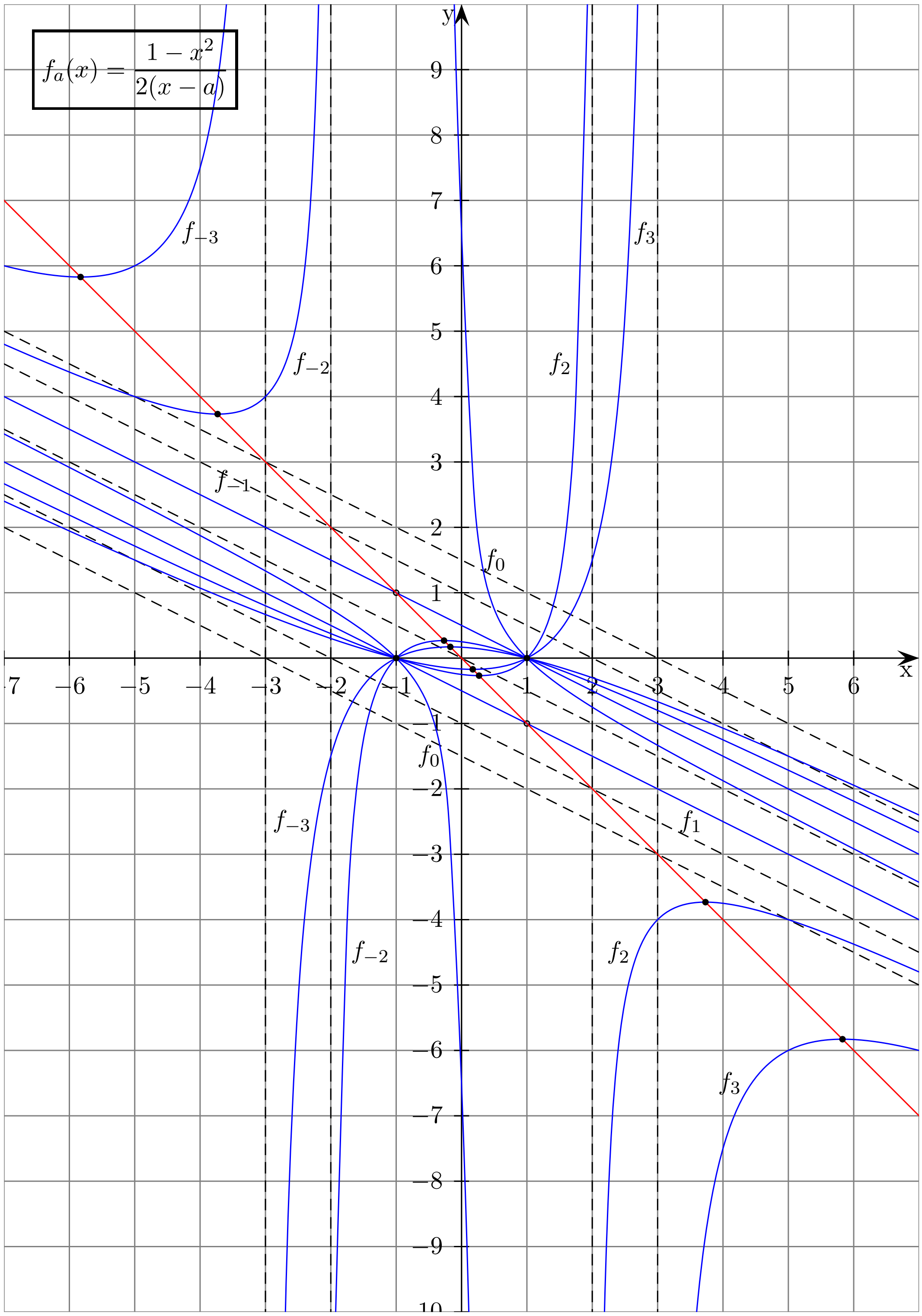
Punktsymmetrie bezüglich des Punktes $(a|-a)$

l) Wertetabelle für $a \in \{-3; -2; -1; 0; +1; +2; +3\}$, $-7 \leqq x \leqq +7$:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f_{-3}(x)$	6	5,83	6	7,5	–	−1,5	0	0,17
$f_{-2}(x)$	4,8	4,38	4	3,75	4	–	0	0,25
$f_{-1}(x)$	4	3,5	3	2,5	2	1,5	–	0,5
$f_0(x)$	3,43	2,92	2,4	1,88	1,33	0,75	0	–
$f_1(x)$	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	−0,5
$f_2(x)$	2,67	2,19	1,71	1,25	0,8	0,38	0	−0,25
$f_3(x)$	2,4	1,94	1,5	1,07	0,67	0,3	0	−0,17

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_{-3}(x)$	0,17	0	−0,3	−0,67	−1,07	−1,5	−1,94	−2,4
$f_{-2}(x)$	0,25	0	−0,38	−0,8	−1,25	−1,71	−2,19	−2,67
$f_{-1}(x)$	0,5	0	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3
$f_0(x)$	–	0	−0,75	−1,33	−1,88	−2,4	−2,92	−3,43
$f_1(x)$	−0,5	–	−1,5	−2	−2,5	−3	−3,5	−4
$f_2(x)$	−0,25	0	–	−4	−3,75	−4	−4,38	−4,8
$f_3(x)$	−0,17	0	1,5	–	−7,5	−6	−5,83	−6

m) Funktionsgraphen für $a \in \{-3; -2; -1; 0; +1; +2; +3\}$:



Walter Fendt, 5. März 2005, zuletzt geändert am 1. April 2010