DIE ZERLEGUNG VON QUADRATINTEGRIERBAREN DARSTELLUNGEN UNIMODULARER GRUPPEN IN IRREDUZIBLE TEILDARSTELLUNGEN

Zulassungsarbeit von

Walter Fendt

27. Februar 1978

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage

Beim Studium von Gruppendarstellungen interessiert man sich unter anderem für die Frage, ob eine gegebene Darstellung die direkte Summe irreduzibler Teildarstellungen ist. Für den Fall unitärer Darstellungen kompakter (damit auch unimodularer) Gruppen wird dieses Problem durch den Satz gelöst, dass solche Darstellungen direkte Summen endlichdimensionaler, irreduzibler Teildarstellungen sind ([8], Seite 265).

1969 gelang Ray A. Kunze eine Verallgemeinerung dieses Satzes: Jede quadratintegrierbare Darstellung einer unimodularen, lokalkompakten Gruppe lässt sich zerlegen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen ([1], Seite 454 bis 459).

Kunze beweist diese Behauptung, indem er sie auf folgenden Satz über Hilbertalgebren zurückführt: Jede quadratintegrierbare Darstellung einer Hilbertalgebra ist die direkte Summe von irreduziblen Teildarstellungen.

Die Aufgabe bei der vorliegenden Arbeit bestand darin, den Beweis des genannten Satzes über die Gruppendarstellungen in allen Einzelheiten auszuführen und dabei auf den Begriff „quadratintegrierbare Darstellung einer Hilbertalgebra“ zu verzichten. Dadurch, dass der Satz über die Hilbertalgebren nicht mehr in voller Allgemeinheit bewiesen werden muss, ergibt sich eine gewisse Vereinfachung.

Beim Beweis werden zunächst, ausgehend von der gegebenen Gruppe G und der gegebenen Gruppendarstellung S, eine maximale Hilbertalgebra $A(G)$ und eine Darstellung von $A(G)$ eingeführt. Später erweist es sich als ausreichend, eine gewisse Teildarstellung L der linksregulären Darstellung von $A(G)$ zu untersuchen.

Schwierigkeiten tauchten auf, als sich herausstellte, dass der Darstellungsraum K von L im Allgemeinen keine H^*-Algebra ist, wie in ([1], Seite 458) behauptet. Der Versuch, mit dem von K aufgespannten, biinvarianten, abgeschlossenen Raum zu arbeiten, scheiterte, da es mir nicht gelang zu beweisen, dass sich die Normeigenschaft der Multiplikation auf diesen biinvarianten Raum überträgt. Eine Möglichkeit hätte darin bestanden, den Satz zu verwenden, dass jedes vom Nullideal verschiedene Linksideal einer maximalen Hilbertalgebra ein nichttriviales, selbstadjungiertes, idempotentes Element besitzt. Dieser Satz wird in ([4], Seite 271 bis 272) mit Hilfe des Spektralsatzes bewiesen. Schließlich stellte sich heraus, dass der Beweis möglich ist, wenn man nicht alle Linksideale von K betrachtet, sondern nur spezielle, nämlich die linksinvarianten Teilräume; dadurch können die Sätze über Linksideale in H^*-Algebren fast wörtlich übernommen werden. Zudem fällt damit auch der etwas komplizierte Äquivalenzbeweis für Linksideale und linksinvariante Teilräume weg.

Zum Schluss möchte ich mich bei Herrn Diplom-Mathematiker W. Krautwald für die Betreuung bei dieser Arbeit bedanken.

Vorwort zur zweiten Auflage

Gegenüber der ersten Auflage wurde das Layout verbessert. Einige Flüchtigkeitsfehler konnten korrigiert werden. Ferner erfolgte eine Anpassung der Arbeit an die neue Rechtschreibung. Einige Formulierungen wurden geringfügig modifiziert.

1 Formulierung des Satzes

Thema dieser Arbeit ist der folgende, von Ray A. Kunze 1970 veröffentlichte Satz:

Satz 1
Jede quadratintegrierbare Darstellung S einer unimodularen, lokalkompakten Gruppe G lässt sich zerlegen in eine direkte Summe irreduzibler, quadratintegrierbarer Darstellungen.

Der Begriff „quadratintegrierbare Darstellung“ ist im folgenden Sinn zu verstehen:

Definition 2
G sei eine unimodulare, lokalkompakte Gruppe, H ein komplexer Hilbertraum. Eine Abbildung S von G in die Gruppe $U(H)$ der unitären Operatoren auf H heißt **unitäre Darstellung** *von G auf H, wenn S ein Gruppenhomomorphismus und stark stetig ist, das heißt wenn für jedes $v \in H$ die Abbildung $x \mapsto S(x)v$ stetig ist. H heißt der* **Darstellungsraum** *von S.*

Definition 3
Eine unitäre Darstellung S von G auf H heißt **quadratintegrierbar**, *wenn für alle $v, w \in H$ die Abbildung $x \mapsto (S(x)v, w)$ quadratintegrierbar auf G ist.*

Literatur: Zu (1): [1], Seite 459
Zu (2): [7], Seite 127
Zu (3): [1], Seite 454

2 Zurückführung auf Hilbertalgebren

Im Folgenden zeigt es sich, dass es zum Beweis von Satz 1 ausreicht, einen analogen Satz über eine gewisse Hilbertalgebra zu beweisen.

Aussage 4
G sei eine unimodulare, lokalkompakte Gruppe, $C_c(G)$ die Menge der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger. Definiert man

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &:= \int_G f(xy^{-1})\, g(y)\, dy \quad \textit{für } f, g \in C_c(G),\ x \in G, \\
f^*(x) &:= \overline{f(x^{-1})} \quad \textit{für } f \in C_c(G),\ x \in G, \\
(f, g) &:= \int_G f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \quad \textit{für } f, g \in C_c(G),
\end{aligned}$$

so wird dadurch $C_c(G)$ zu einer Hilbertalgebra.

Beweis:

Ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und $f_1, f_2 \in C_c(G)$ mit kompaktem Träger T_1 bzw. T_2, so ist auch $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ stetig; falls x nicht in der kompakten Menge $T_1 \cup T_2$ liegt, ist $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = 0$; $C_c(G)$ ist also ein komplexer Vektorraum.

Für festes $x \in G$ und für $f, g \in C_c(G)$ ist die Abbildung $y \mapsto f(xy^{-1})\, g(y)$ stetig mit kompaktem Träger; daher ist die obige Definition der Multiplikation durch das Faltungsintegral sinnvoll. Nun sei wieder $f_1, f_2 \in C_c(G)$ mit kompaktem Träger T_1 bzw. T_2. Außerdem seien $x_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen $f_2 \in C_c(G)$ ist $M := \sup\{|f_2(x)|; x \in G\}$ endlich. Wie etwa in [7], Seite 109 bis 110 gezeigt wird, gibt es eine Umgebung V des Einselements, sodass $|f_1(x) - f_2(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in G$ mit $xy^{-1} \in V$ gilt. Es sei nun $x \in Vx_0$. Dann gilt für alle $y \in G$ wegen $(xy^{-1})(x_0y^{-1})^{-1} = xx_0^{-1} \in V$ die Ungleichung $|f_1(xy^{-1}) - f_1(x_0y^{-1})| < \varepsilon$. Daraus folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
|(f_1 * f_2)(x) - (f_1 * f_2)(x_0)| &= |\int\limits_G f_1(xy^{-1})\, f_2(y)\, dy - \int\limits_G f_1(x_0y^{-1})\, f_2(y)\, dy| \\
&\leq \int\limits_{T_2} |f_1(xy^{-1}) - f_1(x_0y^{-1})|\, M\, dy \\
&\leq M\mu(T_2)\,\varepsilon \quad \text{für alle } x \in Vx_0.
\end{aligned}
$$

Somit ist $f_1 * f_2$ im beliebig gewählten Punkt x_0 stetig.

Nun sei $x \notin T_1T_2$. Ist $y \in G$, so sind zwei Fälle möglich: Im ersten ist $xy^{-1} \in T_1$, also $x \in T_1y$. Wäre $y \in T_2$, so wäre $x \in T_1T_2$, entgegen der Voraussetzung. Daher ist $f_2(y) = 0$. Im zweiten Fall ist $xy^{-1} \notin T_1$, also $f_1(xy^{-1}) = 0$. Fasst man die beiden Fälle zusammen, so folgt aus $x \notin T_1T_2$ stets $f_1(xy^{-1})f_2(y) = 0$ und weiter $(f_1 * f_2)(x) = 0$. Da T_1T_2 kompakt ist (siehe [7], Seite 109), gehört $f_1 * f_2$ zu $C_c(G)$.

Die Multiplikation $*$ erfüllt das Assoziativgesetz:

$$
\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int\limits_G (f * g)(xy^{-1})\, h(y)\, dy \\
&= \int\limits_G \int\limits_G f(xy^{-1}z^{-1})\, g(z)\, dz\, h(y)\, dy \\
&= \int\limits_G \int\limits_G f(xz^{-1})\, g(zy^{-1})\, dz\, h(y)\, dy \\
&= \int\limits_G f(xz^{-1}) \int\limits_G g(zy^{-1})\, h(y)\, dy\, dz \\
&= \int\limits_G f(xz^{-1})\, (g * h)(z)\, dz \\
&= (f * (g * h))(x) \quad \text{für } f, g, h \in C_c(G),\ x \in G.
\end{aligned}
$$

Die Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
(f_1 + f_2) * g &= f_1 * g + f_2 * g, \\
g * (f_1 + f_2) &= g * f_1 + g * f_2, \\
(\lambda f_1) * f_2 &= f_1 * (\lambda f_2) = \lambda(f_1 * f_2)
\end{aligned}
$$

für $f_1, f_2, g \in C_c(G),\ \lambda \in \mathbb{C}$ folgen aus den Linearitätseigenschaften des Integrals.

Also ist $C_c(G)$ eine Algebra über $\mathbb{C}$.

Ist $f \in C_c(G)$ mit kompaktem Träger T, so ist die Funktion $f^* : x \mapsto \overline{f(x^{-1})}$ stetig mit kompaktem Träger T^{-1}; es ist also auch $f^* \in C_c(G)$.

Ebenso leicht sind die Rechenregeln für die Involution zu zeigen:

$$\begin{aligned} f^{**} &= f, \\ (f+g)^* &= f^* + g^*, \\ (\lambda f)^* &= \overline{\lambda} f^*, \\ (f*g)^* &= g^* * f^* \end{aligned}$$

für $f, g \in C_c(G),\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Als Beispiel diene das letzte Gesetz:

$$\begin{aligned} (f*g)^*(x) &= \overline{(f*g)(x^{-1})} \\ &= \overline{\int\limits_G f(x^{-1}y^{-1})\, g(y)\; dy} \\ &= \overline{\int\limits_G g(yx^{-1})\, f(y^{-1})\; dy} \\ &= \int\limits_G g^*(xy^{-1})\, f^*(y)\; dy \\ &= (g^* * f^*)(x) \end{aligned}$$

für beliebiges $x \in G$. Also ist * eine Involution auf $C_c(G)$.

Durch $(f, g) := \int\limits_G f(x)\, \overline{g(x)}\; dx$ wird offensichtlich ein Skalarprodukt definiert, das $C_c(G)$ zum Prähilbertraum macht.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (f,g) &= \int\limits_G f(x)\, \overline{g(x)}\; dx \\ &= \int\limits_G \overline{g(x^{-1})}\, f(x^{-1})\; dx \\ &= \int\limits_G g^*(x)\, \overline{f^*(x)}\; dx \\ &= (g^*, f^*) \end{aligned}$$

für $f, g \in C_c(G)$.

$$\begin{aligned} (f*g, h) &= \int\limits_G (f*g)(x)\, \overline{h(x)}\; dx \\ &= \int\limits_G \int\limits_G f(xy^{-1})\, g(y)\; dy\; \overline{h(x)}\; dx \\ &= \int\limits_G g(y) \int\limits_G f(xy^{-1})\, \overline{h(x)}\; dx\; dy \\ &= \int\limits_G g(y)\, \overline{\int\limits_G f^*(yx^{-1})\, h(x)\; dx}\; dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_G g(y)\,\overline{(f^* * h)(y)}\;dy \\
&= (g, f^* * h)
\end{aligned}
$$

für $f, g, h \in C_c(G)$.

Etwas größer ist der Aufwand, um die Stetigkeit der Linksmultiplikation zu beweisen:

Für $f, g \in C_c(G) \subset L^1(G) \cap L^2(G)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
||f * g||_2{}^2 &= \int_G |(f * g)(x)|^2\;dx \\
&= \int_G |\int_G f(xy^{-1})\,g(y)\;dy|^2\;dx \\
&= \int_G |\int_G f(y^{-1})\,g(yx)\;dy|^2\;dx \\
&\leq \int_G \left(\int_G |f(y^{-1})\,g(yx)|\;dy\right)^2\;dx \\
&= \int_G \left(\int_G |f(y^{-1})\,g(yx)|\;dy\right)\left(\int_G |f(z^{-1})\,g(zx)|\;dz\right)\;dx \\
&= \int_G \int_G \int_G |g(yx)\,g(zx)|\;dx\;|f(y^{-1})\,f(z^{-1})|\;dy\;dz \\
&\leq ||g||_2{}^2 ||f||_1{}^2.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewandt. Zieht man die Wurzel, so ergibt sich mit $||f * g||_2 \leq ||f||_1 ||g||_2$ die Stetigkeit der Abbildung $g \mapsto f * g$.

Als letztes bleibt noch zu zeigen, dass die Produkte $f * g$ mit $f, g \in C_c(G)$ dicht in $C_c(G)$ liegen. Im Satz über die Existenz eines approximativen Einselements in $L^1(G)$ (siehe [7], Seite 124) wird zu vorgegebenem $f \in C_c(G)$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V des Einselements mit folgender Eigenschaft angegeben: Für alle Funktionen $g \in L^1(G)$ mit $g \geq 0$ und $\int_G g(x)\;dx = 1$, die außerhalb von V verschwinden, gilt $||f*g-f||_2 < \varepsilon$. Dabei kann die Umgebung V ohne Beschränkung der Allgemeinheit relativ-kompakt und offen angenommen werden.

Funktionen g mit den angegebenen Eigenschaften gibt es tatsächlich. Denn V enthält eine kompakte Umgebung C des Einselements. Etwa nach [7], Seite 7 gibt es dann eine stetige, reellwertige Funktion g auf G mit $g \geq 0$, $g(x) = 1$ für $x \in C$ und $g(x) = 0$ für $x \notin V$. Da das Haar-Maß einer offenen Menge nicht Null sein kann, gilt $\mu(C) > 0$ und folglich

$$
\int_G g(x)\;dx \geq \int_C g(x)\;dx = \mu(C) > 0;
$$

durch Multiplikation mit einer positiven Konstante kann man sogar $\int_G g(x)\;dx = 1$ erreichen. Da V relativ-kompakt ist, liegt g sogar in $C_c(G)$.

Nun besagt die Ungleichung $||f*g-f||_2 < \varepsilon$ für ein solches g aber, dass alle $f \in C_c(G)$ durch Produkte $f * g$ mit $f, g \in C_c(G)$ approximiert werden können.

Damit erfüllt $C_c(G)$ alle Bedingungen für eine Hilbertalgebra. ∎

Definition 5
Ein *-Algebra-Homomorphismus T von einer Hilbertalgebra A in die involutive Algebra $\mathcal{L}(H)$ der stetigen, linearen Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum H heißt **Darstellung** *von A auf H, wenn die lineare Hülle der Menge $\{T(a)v; a \in A,\ v \in H\}$ dicht in H liegt.*

Bemerkung 6
Ist A eine Hilbertalgebra, so ist wie bei jedem Prähilbertraum die Vervollständigung zu einem Hilbertraum H möglich. Durch die Definition

$$(\lim_{n\to\infty} a_n)^* := \lim_{n\to\infty} {a_n}^* \quad \text{für } a_n \in A$$

wird die Involution auf ganz H fortgesetzt.

Folgendes Verfahren wird angewandt, um die Multiplikation fortzusetzen (führt aber im Allgemeinen nicht zu einer Multiplikation auf ganz H): Durch

$$U_a b := ab, \quad V_a b := ba \quad \text{für } a, b \in A$$

werden stetige, lineare Operatoren U_a bzw. V_a auf A definiert. Eine Fortsetzung zu stetigen, linearen Operatoren $\overline{U_a}$ bzw. $\overline{V_a}$ auf H ist möglich, wenn man für $a, b_n \in A$ definiert:

$$\overline{U_a}(\lim_{n\to\infty} b_n) := \lim_{n\to\infty} U_a b_n, \quad \overline{V_a}(\lim_{n\to\infty} b_n) := \lim_{n\to\infty} V_a b_n.$$

Nun ist durch

$$U_a b := \overline{V_b}\, a, \quad V_a b := \overline{U_b}\, a \quad \text{für } a \in H, b \in A$$

ein linearer, im Allgemeinen nicht stetiger Operator auf A bestimmt. Falls $a \in A$ ist, stimmen diese Definitionen von U_a bzw. V_a mit den früheren überein.

Ist U_a stetig, so heißt a *linksbeschränkt*, ist V_a stetig, so heißt a *rechtsbeschränkt*. Links- und Rechtsbeschränktheit sind äquivalent, sodass man von *beschränkten* Elementen schlechthin spricht. Die Menge aller beschränkten Elemente sei mit $\hat{A}$ bezeichnet.

Für $a \in \hat{A}$ lässt sich jetzt wie oben U_a bzw. V_a zu einem stetigen, linearen Operator $\overline{U_a}$ bzw. $\overline{V_a}$ fortsetzen. Definiert man

$$ab := \overline{U_a}\, b (= \overline{V_b}\, a) \quad \text{für } a, b \in \hat{A},$$

so macht diese Multiplikation $\hat{A}$ wieder zu einer Hilbertalgebra, der zu A gehörigen maximalen Hilbertalgebra.

Wiederholt man das Verfahren, bildet man also $\hat{\hat{A}}$, so erhält man wieder $\hat{A}$.

Die Vervollständigung von $C_c(G)$ ist der Hilbertraum $L^2(G)$. Die zu $C_c(G)$ gehörige maximale Hilbertalgebra sei mit $A(G)$ bezeichnet. Die Multiplikation in $A(G)$ sei ab jetzt durch Hintereinanderschreiben der Faktoren ausgedrückt.

Aussage 7
G sei eine unimodulare, lokalkompakte Gruppe, S eine quadratintegrierbare Darstellung von G auf dem Hilbertraum H. Dann gibt es genau eine stetige, lineare Abbildung $\tilde{T}$ von $L^2(G)$ nach $\mathcal{L}(H)$ mit der definierenden Eigenschaft

$$(\tilde{T}(f)\, v, w) = \int_G (S(x)\, v, w)\, f(x)\, dx \quad \textit{für } f \in L^2(G), v, w \in H.$$

Beweis:

Es wird bei festem $w \in H$ die Abbildung von H nach $L^2(G)$ betrachtet, die jedem $v \in H$ die Funktion $R_{vw} : x \mapsto (S(x)v, w)$ zuordnet. (Zur Vereinfachung der Sprechweise sei hier nur von Funktionen die Rede anstatt von Klassen äquivalenter Funktionen.) Wegen der Linearität des Operators $S(x)$ ist die Abbildung $v \mapsto R_{vw}$ selbst linear.

Als nächstes wird die Abgeschlossenheit dieser Abbildung $v \mapsto R_{vw}$ gezeigt: Es konvergiere nämlich v_n gegen v und $R_{v_n w}$ gegen $R \in L^2(G)$ (im Sinne der $L^2(G)$-Norm). Aus $v_n \to v$ ergibt sich

$$R_{v_n w}(x) = (S(x)v_n, w) \to (S(x)v, w) = R_{vw}(x) \quad \text{für alle } x \in G.$$

Damit folgt $R_{vw}(x) = R(x)$ für alle $x \in G$ außerhalb einer Nullmenge. Wegen

$$||R_{v_n w} - R_{vw}||_2 \leq ||R_{v_n w} - R||_2 + ||R - R_{vw}||_2$$

konvergiert $R_{v_n w}$ gegen R_{vw} in der $L^2(G)$-Norm.

Damit ist die betrachtete Abbildung $v \mapsto R_{vw}$ abgeschlossen, nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen also auch stetig, das heißt es gilt

$$\text{(a)} \quad ||R_{vw}||_2 \leq A_w ||v|| \quad \text{für alle } v \in H,$$

wobei A_w eine nichtnegative Konstante ist.

Analog kann man zeigen:

$$\text{(b)} \quad ||R_{vw}||_2 \leq B_v ||w|| \quad \text{für alle } w \in H.$$

Nun sei f eine beliebige Funktion aus $L^2(G)$. Da auch R_{vw} nach Voraussetzung in $L^2(G)$ liegt, folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int_G |R_{vw}(x)\, f(x)|\, dx \leq \left(\int_G |R_{vw}(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_G |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Daher ist $x \mapsto R_{vw}(x)\, f(x)$ eine $L^1(G)$-Funktion. Das Integral $\int_G R_{vw}(x)\, f(x)\, dx$ ist also für beliebige $v, w \in H$ definiert.

Die Abschätzung durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt außerdem zusammen mit (a) und (b):

$$\text{(c)} \quad |\int_G R_{vw}(x)\, f(x)\, dx| \leq A_w ||v||\; ||f||_2,$$

$$\text{(d)} \quad |\int_G R_{vw}(x)\, f(x)\, dx| \leq B_v ||w||\; ||f||_2$$

für $f \in L^2(G)$ und $v, w \in H$.

Die Ungleichung (d) beweist, dass die Abbildung $w \mapsto \overline{\int_G R_{vw}(x)\, f(x)\, dx}$ eine stetige Linearform auf H ist. Es gibt also nach dem Satz von Riesz einen linearen Endomorphismus $\tilde{T}(f)$ auf H, sodass

$$(w, \tilde{T}(f)v) = \overline{\int_G R_{vw}(x)\, f(x)\, dx},$$

also auch

$$(\tilde{T}(f)v, w) = \int\limits_G R_{vw}(x)\, f(x)\; dx$$

für alle $v, w \in H$ ist.

Es konvergiere nun v_n gegen v und $\tilde{T}(f)v_n$ gegen v_0. Wegen (c) gilt

$$(\tilde{T}(f)v_n, w) \to (\tilde{T}(f)v, w) \quad \text{für alle } w \in H.$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung

$$(\tilde{T}(f)v_n, w) \to (v_0, w) \quad \text{für alle } w \in H.$$

Somit folgt $v_0 = \tilde{T}(f)v$, und die lineare Abbildung $\tilde{T}(f)$ ist abgeschlossen, also auch stetig nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Damit ist die Existenz einer Abbildung $\tilde{T} : L^2(G) \to \mathcal{L}(H)$ gezeigt, die der Bedingung

$$(\tilde{T}(f)v, w) = \int\limits_G (S(x)v, w)\, f(x)\; dx$$

genügt.

Die Eindeutigkeit von $\tilde{T}$ folgt unmittelbar aus dieser Bedingung.

Zu zeigen ist als nächstes die Linearität von $\tilde{T}$:

Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ f_1, f_2 \in L^2(G),\ v, w \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)v, w) &= \int\limits_G (S(x)v, w)\,(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\; dx \\
&= \lambda_1 \int\limits_G (S(x)v, w)\, f_1(x)\; dx + \lambda_2 \int\limits_G (S(x)v, w)\, f_2(x)\; dx \\
&= \lambda_1(\tilde{T}(f_1)v, w) + \lambda_2(\tilde{T}(f_2)v, w) \\
&= ((\lambda_1 \tilde{T}(f_1) + \lambda_2 \tilde{T}(f_2))v, w).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\tilde{T}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \tilde{T}(f_1) + \lambda_2 \tilde{T}(f_2)$.

Schließlich ist $\tilde{T}$ stetig im Sinne der Normtopologien auf $L^2(G)$ und $\mathcal{L}(H)$: Es konvergiere nämlich die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in L^2(G)$ gegen f in der $||\ ||_2$-Norm und $\tilde{T}(f_n)$ gegen $U \in \mathcal{L}(H)$ in der Operatornorm. Daraus folgt $(\tilde{T}(f_n)v, w) \to (Uv, w)$ für beliebige $v, w \in H$. Andererseits gilt wegen (c) auch $(\tilde{T}(f_n)v, w) \to (\tilde{T}(f)v, w)$. Da der Limes eindeutig bestimmt ist, folgt hieraus $(\tilde{T}(f)v, w) = (Uv, w)$ und weiter $\tilde{T}(f) = U$. $\tilde{T}$ ist also abgeschlossen und damit auch stetig. ∎

Aussage 8
Die Abbildung $\tilde{T} : L^2(G) \to \mathcal{L}(H)$ aus (7) hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\overline{V_g} f) &= \tilde{T}(f)\tilde{T}(g), \\
\tilde{T}(\overline{U_g} f) &= \tilde{T}(g)\tilde{T}(f), \\
\tilde{T}(f^*) &= (\tilde{T}(f))^*
\end{aligned}$$

für $f \in L^2(G)$, $g \in A(G)$. Dabei sei $\overline{V_g}$ beziehungsweise $\overline{U_g}$ die kanonische Fortsetzung der Rechts- beziehungsweise Linksmultiplikation von $C_c(G)$ gemäß (6).

Beweis:

a) Zunächst sei $f, g \in C_c(G)$. Für $v, w \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}(fg)v, w) &= \int_G (S(x)v, w)\,(fg)(x)\; dx \\
&= \int_G \int_G (S(x)v, w)\, f(xy^{-1})\, g(y)\; dy\; dx \\
&= \int_G \int_G (S(xy)v, w)\, f(x)\, g(y)\; dy\; dx \\
&= \int_G \int_G (S(x)S(y)v, w)\, f(x)\, g(y)\; dy\; dx \\
&= \int_G \int_G (S(y)v, (S(x))^* w)\, g(y)\; dy\; f(x)\; dx \\
&= \int_G (\tilde{T}(g)v, (S(x))^* w)\, f(x)\; dx \\
&= \int_G (S(x)\,\tilde{T}(g)v, w)\, f(x)\; dx \\
&= (\tilde{T}(f)\,\tilde{T}(g)v, w).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\tilde{T}(fg) = \tilde{T}(f)\tilde{T}(g)$ für $f, g \in C_c(G)$.

b) Nun sei $f \in C_c(G),\ g \in A(G),\ g_n \to g$ mit $g_n \in C_c(G)$. Dann gilt wegen $fg_n \to fg$:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(fg) &\overset{(7)}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(fg_n) \\
&\overset{\text{a)}}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(f)\,\tilde{T}(g_n) \\
&= \tilde{T}(f) \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(g_n) \\
&\overset{(7)}{=} \tilde{T}(f)\,\tilde{T}(g).
\end{aligned}$$

c) Im dritten Schritt sei $f \in L^2(G)$, $g \in A(G)$ und $f_n \to f$ mit $f_n \in C_c(G)$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\overline{V_g} f) &\overset{(7)}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(f_n g) \\
&\overset{\text{b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(f_n)\,\tilde{T}(g) \\
&\overset{(7)}{=} \tilde{T}(f)\,\tilde{T}(g).
\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man $\tilde{T}(\overline{U_g} f) = \tilde{T}(g)\,\tilde{T}(f)$.

d) Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich folgendermaßen: Für $f \in L^2(G)$, $v, w \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}(f^*)v, w) &= \int_G (S(x)v, w)\, f^*(x)\; dx \\
&= \int_G (S(x)v, w)\, \overline{f(x^{-1})}\; dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\int_G (w, S(x)v)\, f(x^{-1})\; dx} \\
&= \overline{\int_G ((S(x))^* w, v)\, f(x^{-1})\; dx} \\
&= \overline{\int_G (S(x^{-1})w, v)\, f(x^{-1})\; dx} \\
&= \overline{\int_G (S(x)w, v)\, f(x)\; dx} \\
&= \overline{(\tilde{T}(f)w, v)} \\
&= (v, \tilde{T}(f), w).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $\tilde{T}(f^*) = (\tilde{T}(f))^*$ für alle $f \in L^2(G)$. ■

Aussage 9
Ist $\tilde{T} : L^2(G) \to \mathcal{L}(H)$ die in (7) definierte Abbildung, so ist die Restriktion T von $\tilde{T}$ auf $A(G)$ eine im Sinne der $||\ ||_2$-Norm und der Operatornorm stetige Darstellung der maximalen Hilbertalgebra $A(G)$.

Beweis:

Wegen (7) und (8) ist T ein *-Algebra-Homomorphismus. Auch die Stetigkeit von T folgt unmittelbar aus (7). Es bleibt also nur zu zeigen, dass die lineare Hülle der Menge $\{T(f)\,v;\ f \in A(G),\ v \in H\}$ dicht in H liegt.

Es sei die gegenteilige Annahme richtig. Dann gibt es in H einen Vektor $w \neq 0$, sodass für alle $f \in A(G)$ und alle $v \in H$ die Aussage $(T(f)v, w) = 0$ gilt. Da die Fortsetzung $\tilde{T}$ von T stetig ist und $A(G)$ dicht in $L^2(G)$ liegt, folgt sogar $(\tilde{T}(f)v, w) = 0$ für beliebige $f \in L^2(G)$ und $v \in H$. Definiert man $f(x) := \overline{(S(x)w, w)}$ für $x \in G$, so ist f eine $L^2(G)$-Funktion. Wählt man nun $v := w$, so ergibt sich daraus $\int_G |(S(x)w, w)|^2\ dx = \int_G (S(x)w, w)\,\overline{S(x)w, w)}\ dx = 0$ und damit $(S(x)w, w) = 0$ für alle $x \in G$ außerhalb einer Nullmenge. Wegen der starken Stetigkeit von S ist die Abbildung $x \mapsto (S(x)w, w)$ stetig, sodass $(S(x)w, w) = 0$ sogar für alle $x \in G$ zutrifft. Wählt man speziell für x das Einselement e, so folgt $(w, w) = 0$ im Widerspruch zu $w \neq 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Aussage 10
Ein abgeschlossener Teilraum I von H ist genau dann S-invariant, wenn er T-invariant ist. (Bezeichnungen wie in (7))

Beweis:

Zunächst sei I S-invariant. Dann gilt $(S(x)v, w) = 0$ für $x \in G,\ v \in I,\ w \in H \ominus I$. Daraus folgt unter Berücksichtigung der Definition von $\tilde{T}$, dass $(\tilde{T}(f)v, w) = 0$ für alle $f \in L^2(G),\ v \in I,\ w \in H \ominus I$ zutrifft. I ist also $\tilde{T}$-invariant und somit erst recht T-invariant.

Umgekehrt sei nun I nicht S-invariant. Es existieren also $x_0 \in G,\ v \in I,\ w \in H \ominus I$, sodass $\alpha := (S(x_0)v, w)$ ungleich 0 ist. Wegen der starken Stetigkeit von S und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gibt es eine Umgebung V von x_0, sodass $|(S(x)v, w)| \geq \frac{|\alpha|}{2}$ für alle $x \in V$ gilt. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit V als integrierbar vorausgesetzt werden. Nun sei f die $L^2(G)$-Funktion, die durch die Beziehung $f(x) := \overline{(S(x)v, w)}$ für $x \in G$ definiert ist. Dann kann man die folgende Abschätzung machen:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{T}(f)v, w) &= \int_G (S(x)v, w)\,\overline{(S(x)v, w)}\;dx \\
&= \int_G |(S(x)v, w)|^2\;dx \\
&\geq \int_V |(S(x)v, w)|^2\;dx \\
&\geq \frac{|\alpha|^2}{4}\mu(V)
\end{aligned}
$$

Da μ ein Haarsches Maß ist, muss $\mu(V) > 0$ und folglich auch $(\tilde{T}(f)v, w) > 0$ sein. Der Unterraum I kann also nicht $\tilde{T}$-invariant sein.

Wäre I nun T-invariant, so würde aus $g \in A(G)$ und $v \in I$ auch $T(g)v \in I$ folgen. Da nach (7) $\tilde{T}$ stetig bezüglich der $L^2(G)$-Norm und der Operatornorm in $\mathcal{L}(H)$ ist und $A(G)$ in $L^2(G)$ dicht liegt im Sinne der $L^2(G)$-Norm, wäre also auch $\tilde{T}(g)v \in I$ für alle $g \in L^2(G)$ richtig; I ist nämlich abgeschlossen. Nach dem oben Bewiesenen ist das aber nicht möglich. I ist infolgedessen nicht T-invariant. ■

Es folgt nun die Behauptung über die maximale Hilbertalgebra $A(G)$, auf die Satz 1 zurückgeführt wird.

Aussage 11
Die Darstellung T von $A(G)$, die in (7) und (9) definiert wurde, lässt sich zerlegen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Beweis: In den folgenden Abschnitten (3. bis 6.)

Aussage 12
Um Satz 1 über eine unimodulare, lokalkompakte Gruppe G zu beweisen, genügt es, Aussage 11 über die maximale Hilbertalgebra $A(G)$ zu zeigen.

Beweis:
Falls (11) richtig ist, lässt sich H zerlegen in eine direkte Summe T-irreduzibler, abgeschlossener Unterräume. Gemäß (10) sind aber die T-Invarianz und die S-Invarianz abgeschlossener Teilräume äquivalent. Dasselbe gilt daher auch für die Irreduzibilität von Unterräumen bzw. von Teildarstellungen. S ist also direkte Summe irreduzibler Teildarstellungen. Diese Teildarstellungen sind ebenso wie S quadratintegrierbar. ■

Literatur:	Zu (4):	[4], Seite 270 bis 271
	Zu (5):	[1], Seite 455
	Zu (6):	[4], Seite 267 bis 269
	Zu (7):	[1], Seite 455; [2], Seite 56 bis 57
	Zu (8) bis (12):	[1], Seite 455, 457, 459

3 Beschränkung auf zyklische Darstellungen

In diesem Abschnitt seien wieder G die gegebene Gruppe, $A(G)$ die in (6) eingeführte maximale Hilbertalgebra und T die in (7) und (9) definierte Darstellung von $A(G)$ auf dem komplexen Hilbertraum H.

Gemäß dem letzten Ergebnis (12) beschäftigt sich der Rest der Arbeit mit dem Beweis von (11). Dabei ergibt sich eine Vereinfachung dadurch, dass man sich auf den Fall beschränken kann, in dem T zyklisch ist.

Aussage 13
Ist ein abgeschlossener Teilraum I von H T-invariant, so ist auch $H \ominus I$ T-invariant.

Beweis:

Ist $v \in H \ominus I$, so folgt für alle $w \in I$ und für alle $f \in A(G)$ wegen $T(f^*)w \in I$

$$(T(f)v, w) = (v, (T(f))^* w) = (v, T(f^*)w) = 0.$$

Also gilt für beliebige $f \in A(G)$ und $v \in H \ominus I$ die Aussage $T(f)v \in H \ominus I$, das heißt $H \ominus I$ ist T-invariant. ∎

Aussage 14
T lässt sich in eine direkte Summe zyklischer Darstellungen zerlegen.

Beweis:

Es sei $v_1 \neq 0$ ein beliebiger Vektor aus H. H_1 sei die abgeschlossene Hülle von $\{T(f)v_1;\ f \in A(G)\}$ in H. H_1 ist abgeschlossener Unterraum von H. Wäre nun $T(g)v_1 = 0$ für alle $g \in A(G)$ richtig, so würden wegen $(T(f)v, v_1) = (v, T(f^*)v_1)$ alle Vektoren $T(f)v$ mit $f \in A(G),\ v \in H$ in $H \ominus \mathbb{C}v_1$ liegen, und die lineare Hülle von $\{T(f)v;\ f \in A(G),\ v \in H\}$ wäre nicht dicht in H. Also ist $H_1 \neq \{0\}$.

Wegen

$$T(f)(\lim_{n\to\infty} T(g_n)v_1) = \lim_{n\to\infty} T(fg_n)v_1 \in H_1$$

ist H_1 auch T-invariant. Außerdem ist H_1 nach Definition zyklischer Teilraum von H bezüglich T.

Es sei nun $\mathcal{M}$ die Menge aller Systeme $\{H_q;\ q \in Q\}$, für welche die $H_q \neq \{0\}$ zueinander orthogonale, bezüglich T zyklische, abgeschlossene Teilräume von H sind. $\mathcal{M}$ ist nicht leer, da $\{H_1\}$ ein solches System ist. Die Inklusion $\subset$ macht $\mathcal{M}$ zu einer halbgeordneten Menge. Ist nun $\{S_p;\ p \in P\} \subset \mathcal{M}$ eine Kette, so sind auch alle Elemente von $\bigcup_{p\in P} S_p$ zueinander orthogonale, T-zyklische, abgeschlossene Teilräume von H und ungleich dem Nullraum; $\bigcup_{p\in P} S_p$ gehört also ebenfalls zu $\mathcal{M}$. Damit ist die Voraussetzung des Zornschen Lemmas erfüllt und die Existenz eines maximalen Elements $\{H_q;\ q \in Q\} \in \mathcal{M}$ bewiesen.

Dann gilt aber $H = \bigoplus_{q\in Q} H_q$. Andernfalls gäbe es nämlich in dem T-invarianten Teilraum $H \ominus (\bigoplus_{q\in Q} H_q)$ einen Vektor $v_0 \neq 0$. Wie schon im ersten Teil des Beweises gezeigt, gäbe es einen vom Nullraum verschiedenen, zyklischen Teilraum H_0 von $H \ominus (\bigoplus_{q\in Q} H_q)$. Dann wäre aber $\{H_q;\ q \in Q\} \cup \{H_0\}$ ein zu $\mathcal{M}$ gehörendes System und somit $\{H_q;\ q \in Q\}$ nicht maximal. H ist infolgedessen die direkte Summe der T-zyklischen Unterräume H_q. ∎

Aussage 15
Im Beweis von (11) genügt es, die Zerlegbarkeit jeder zyklischen Teildarstellung von T zu zeigen.

Beweis:

Die Zerlegbarkeit sei bereits für alle zyklischen Teildarstellungen von T bewiesen. Wegen (14) lässt sich nun H in eine direkte Summe zyklischer Unterräume zerlegen. Gemäß der Annahme ist jeder der Summanden weiter zerlegbar in eine direkte Summe T-irreduzibler Unterräume. Damit gilt (11) auch für die Ausgangsdarstellung T. ■

Literatur:	Zu (14):	[6], Seite 253
	Zu (15):	[1], Seite 457

4 Beschränkung auf eine Teildarstellung der linksregulären Darstellung

In diesem Abschnitt seien wieder G die gegebene Gruppe, $A(G)$ die in (6) eingeführte maximale Hilbertalgebra und T die in (7) und (9) definierte Darstellung von $A(G)$ auf dem komplexen Hilbertraum H. Gemäß dem Ergebnis (15) sei eine zyklische Teildarstellung von T gegeben, die der Einfachheit halber wieder mit T bezeichnet werde; $z \neq 0$ sei ein fester zyklischer Vektor von T. Wie bisher sei $\tilde{T}$ die stetige Fortsetzung der Darstellung T auf $L^2(G)$.

Eine weitere Vereinfachung beim Beweis von (11) ergibt sich nun, wenn man den Zusammenhang zwischen T und der linksregulären Darstellung von $A(G)$ untersucht.

Aussage 16
Es existiert eine stetige, lineare Abbildung $U : H \mapsto L^2(G)$, sodass folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(Uv, g) = (v, T(g)z) \quad \textit{für alle } v \in H,\ g \in A(G)$$

Beweis:

Durch $U^*g := \tilde{T}(g)z$ wird eine stetige, lineare Abbildung $U^* : L^2(G) \to H$ definiert. Dann ist auch die adjungierte Abbildung $U := U^{**}$, die H in $L^2(G)$ überführt, stetig und linear. Schließlich gilt für beliebige $v \in H,\ g \in A(G)$:

$$(Uv, g) = (U^{**}v, g) = (v, U^*g) = (v, \tilde{T}(g)z) = (v, T(g)z).$$

■

Aussage 17
Die in (16) definierte Abbildung U ist injektiv.

Beweis:

Es sei $Uv = 0$ für ein $v \in H$. Dann gilt nach (16), dass $(v, T(g)z) = 0$ für alle $g \in A(G)$ zutrifft. Da z ein zyklischer Vektor ist, liegt die Menge $\{T(g)z;\ g \in A(G)\}$ dicht in H. Also ist $v = 0$. ■

In den Aussagen (18) und (19) sei wie in (6) $\overline{U_f}$ die stetige Fortsetzung der Linksmultiplikation mit f auf ganz $L^2(G)$.

Aussage 18
Für $f \in A(G),\ v \in H$ gilt $\overline{U_f}(Uv) = UT(f)v$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
(\overline{U_f}(Uv), g) &= (Uv, f^* g) \\
&\overset{(16)}{=} (v, T(f^* g) z) \\
&= (v, T(f^*)\, T(g) z) \\
&= (v, (T(f))^*\, T(g) z) \\
&= (T(f) v, T(g) z) \\
&\overset{(16)}{=} (UT(f) v, g)
\end{aligned}$$

ist für alle $g \in A(G)$ richtig. ∎

Aussage 19
Bezeichnet man mit K die abgeschlossene Hülle von $U(H)$ in $L^2(G)$, so ist K ein abgeschlossener, links $A(G)$-invarianter Teilraum von $L^2(G)$. Ist L' die linksreguläre Darstellung von $A(G)$ auf $L^2(G)$, definiert durch

$$L'(f) g := \overline{U_f}(g) \quad \textit{für } f \in A(G),\, g \in L^2(G),$$

so definiert K also eine Teildarstellung L von L'.

Beweis:

Ist $k \in K$, so gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus H mit $Uv_n \to k$. Für jedes $f \in A(G)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\overline{U_f}(k) &= \overline{U_f}(\lim_{n\to\infty} Uv_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\overline{U_f}(Uv_n)) \\
&\overset{(18)}{=} \lim_{n\to\infty} (UT(f) v_n) \in K.
\end{aligned}$$

Damit ist also K links $A(G)$-invariant. ∎

Aussage 20
Für U (Definition in (16)) existiert die polare Zerlegung $U = VW$; dabei ist V eine unitäre Abbildung von H auf K (Definition in (19); W ist ein hermitescher Operator auf H und mit jedem linearen Operator aus $\mathcal{L}(H)$ vertauschbar, mit dem U^*U vertauschbar ist.

Beweis:

$U^*U : H \to H$ ist ein hermitescher Operator mit $(U^*Uv, v) = (Uv, Uv) \geq 0$ für alle $v \in H$, das heißt $U^*U \geq 0$. Damit existiert die positive Quadratwurzel $W := {}_+\sqrt{U^*U}$. W ist hermitesch auf H und mit jedem Operator aus $\mathcal{L}(H)$ vertauschbar, mit dem U^*U vertauschbar ist.

Wegen

$$(Wv, Wv) = (W^2 v, v) = (U^*Uv, v) = (Uv, Uv)$$

gilt für alle $v \in H$ die Beziehung $||Wv|| = ||Uv||$. Daher kann man wie folgt eine lineare Isometrie $V : \overline{W(H)} \to \overline{U(H)} = K$ definieren:

(a) $$V(\lim_{n\to\infty} Wv_n) := \lim_{n\to\infty} Uv_n \quad \text{für } v_n \in H$$

Denn falls $(Wv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n \in H$ konvergiert, gilt nach Cauchy $||Wv_n - Wv_m|| \to 0$ für $n, m \to \infty$, also auch

$$||Uv_n - Uv_m|| = ||U(v_n - v_m)|| = ||W(v_n - v_m)|| = ||Wv_n - Wv_m|| \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty,$$

das heißt auch $(Uv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in dem vollständigen Raum $\overline{U(H)} = K$.

Außerdem ist die Definition von V repräsentantenunabhängig: Es sei nämlich $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge aus H, für die $(Ww_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lim\limits_{n\to\infty} Wv_n$ konvergiert. Unter dieser Voraussetzung ist wegen $||W(w_n - v_n)|| = ||U(w_n - u_n)||$ mit der Folge $(W(w_n - v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(U(w_n - v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge; damit gilt aber $\lim\limits_{n\to\infty} Uv_n = \lim\limits_{n\to\infty} Uw_n$.

Die Isometrieeigenschaft, die Gleichung $U = VW$ und die Surjektivität von V folgen unmittelbar aus der Definitionsgleichung (a).

Zu zeigen ist also nur noch $\overline{W(H)} = H$: Es sei ein Vektor $v \in H \ominus \overline{W(H)}$ gegeben. Dann kann man auf $(Wv, w) = (v, Ww) = 0$ für beliebige $w \in H$ schließen. Also ist $Wv = 0$ und weiter $||Uv|| = ||Wv|| = 0$. Wegen der in (17) gezeigten Injektivität von U ist $v = 0$. Der Abschluss des Teilraums $W(H)$, auf dem V definiert ist, ist also gleich H. ■

Aussage 21
Die Darstellungen T und L von $A(G)$ sind unitär äquivalent. Es gilt nämlich

$$VT(f)V^* = L(f) \quad \textit{für alle } f \in A(G).$$

Beweis:

a) Für $f \in A(G),\ v \in H$ gilt nach (16) $(v, U^*f) = (Uv, f) = (v, T(f)z)$, das heißt $U^*f = T(f)z$ für jedes $f \in A(G)$. Aufgrund der Stetigkeit von $U^* : L^2(G) \to H$ und von $\tilde{T} : L^2(G) \to \mathcal{L}(H)$ folgt daraus $U^*f = \tilde{T}(f)z$ für alle $f \in L^2(G)$.

b) Für $f \in A(G)$ gilt $U^*UT(f)z = T(f)U^*Uz$. Das ergibt sich nämlich aus der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} U^*UT(f)z &\overset{(18)}{=} U^*(\overline{U_f}(Uz)) \\ &\overset{\text{a)}}{=} \tilde{T}(\overline{U_f}(Uz))z \\ &\overset{(8)}{=} \tilde{T}(f)\tilde{T}(Uz)z \\ &\overset{\text{a)}}{=} T(f)U^*Uz \end{aligned}$$

■

c) Für $f \in A(G),\ v \in H$ gilt $U^*UT(f)v = T(f)U^*Uv$. Man kann nämlich für $g \in A(G)$ schließen:

$$\begin{aligned} U^*UT(f)T(g)z &= U^*UT(fg)z \\ &\overset{\text{b)}}{=} T(fg)U^*Uz \\ &= T(f)T(g)U^*Uz \\ &\overset{\text{b)}}{=} T(f)U^*UT(g)z \end{aligned}$$

Weil die Menge $\{T(g)z;\ g \in A(G)\}$ dicht in H liegt, folgt daraus die Behauptung.

d) Nach (20) ist wie U^*U auch $W := {}_+\sqrt{U^*U}$ mit $T(f)$ vertauschbar für beliebiges $f \in A(G)$. Damit ergibt sich für $f \in A(G),\ v \in H$:

$$\begin{aligned} VT(f)V^*Uv &\overset{(20)}{=} VT(f)V^*VWv \\ &\overset{(20)}{=} VT(f)Wv \\ &= VWT(f)v \\ &\overset{(20)}{=} UT(f)v \\ &\overset{(18)}{=} \overline{U_f}(Uv) \\ &= L(f)Uv \end{aligned}$$

Da die Menge $U(H)$ dicht in K liegt und V, $T(f)$, V^* sowie $L(f)$ stetige Operatoren sind, folgt daraus die behauptete unitäre Äquivalenz $VT(f)V^* = L(f)$. ■

Diese unitäre Äquivalenz von T und L legt folgenden, zu (11) analogen Satz nahe:

Aussage 22
Die Darstellung L von $A(G)$ auf K lässt sich in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegen.

Beweis: In den beiden letzten Abschnitten (5 und 6)

Aussage 11 und damit auch Satz 1 lassen sich auf Aussage 22 zurückführen. Es gilt nämlich folgende Behauptung:

Aussage 23
Falls Aussage 22 richtig ist, gilt auch Aussage 11.

Beweis:

Nach (21) besteht zwischen T und L die unitäre Äquivalenz $L(f) = VT(f)V^*$ für alle $f \in A(G)$. V und V^* bilden die abgeschlossenen Unterräume von H und K aufeinander ab. Die T-Invarianz eines abgeschlossenen Teilraums I von H ist äquivalent zur L-Invarianz des abgeschlossenen Teilraums $V(I)$ von K; dasselbe gilt daher auch für die Irreduzibilität von Unterräumen. Da schließlich V^* eine lineare Isometrie ist, folgt:

Falls $K = \bigoplus_{q \in Q} K_q$ ist, gilt auch $H = \bigoplus_{q \in Q} V^*(K_q)$.

Ist (22) richtig, so kann man die K_q als L-irreduzibel annehmen, womit H die direkte Summe der T-irreduziblen, abgeschlossenen Unterräume $H_q := V^*(K_q)$ wäre. ■

Literatur:	Zu (16) bis (19):	[1], Seite 457 bis 458
	Zu (20):	[1], Seite 458; [9], Seite 163
	Zu (21):	[1], Seite 458

5 Eigenschaften des Darstellungsraums K

Wie bisher seien G die vorgegebene Gruppe, $A(G)$ die in (6) eingeführte maximale Hilbertalgebra und T die in (7) und (9) definierte Darstellung von $A(G)$ auf H. K wurde wie in (19) definiert; L sei wie in (19) die durch K bestimmte Teildarstellung der linksregulären Darstellung von $A(G)$.

Da man nach dem letzten Ergebnis (23) zum Beweis von (11) nur die Darstellung L betrachten muss, werden nun L und der zugehörige Darstellungsraum K näher untersucht.

Aussage 24
Es gibt eine Konstante $c > 0$ derart, dass $||L(f)|| \leq c||f||$ für alle $f \in A(G)$ gilt.

Beweis:

Nach (9) ist T stetig im Sinn der Normtopologien auf $A(G)$ und $\mathcal{L}(H)$; es gibt also eine Konstante $c > 0$, sodass $||T(f)|| \leq c||f||$ für alle $f \in A(G)$ gilt. Daher erhält man für $f \in A(G),\ k \in K$:

$$\begin{aligned} ||L(f)k|| &\overset{(21)}{=} ||VT(f)V^*k|| \\ &\leq ||V||\,||T(f)||\,||V^*||\,||k|| \\ &= ||T(f)||\,||k|| \qquad (V \text{ unitär}) \\ &\leq c\,||f||\,||k|| \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $||L(f)|| \leq c\,||f||$. ■

Aussage 25
K ist eine Teilmenge von $A(G)$.

Beweis:

Für $f \in A(G),\ g \in K$ gilt nach (24)

$$||\overline{U_f}(g)|| = ||L(f)g|| \leq c\,||f||\,||g||.$$

Daraus folgt, dass die Abbildung $f \mapsto \overline{U_f}g = V_g f$ für jedes beliebige $g \in K$ eine beschränkte, lineare Abbildung von $A(G)$ nach $L^2(G)$ ist. Da $A(G)$ als maximale Hilbertalgebra definiert wurde, gilt also $K \subset A(G)$. ■

Aussage 26
Durch $< f, g >:= c^2(f, g)$ kann ein neues Skalarprodukt auf $L^2(G)$ definiert werden, sodass K mit der dadurch induzierten Norm eine Banachalgebra ist; dabei ist c wie in (24) zu wählen.

Beweis:

Durch die Multiplikation des Skalarprodukts mit einer positiven Konstante bleiben die definierenden Eigenschaften des Skalarprodukts und die Vollständigkeit erhalten. K bleibt also ein Banachraum.

Dass K eine Unteralgebra von $A(G)$ ist, folgt aus (19) und (25). Außerdem gilt, wenn man die durch $<,>$ induzierte Norm mit $|||\ |||$ bezeichnet, für alle $f \in A(G)$ und für alle $g \in K$

$$\begin{aligned} |||fg|||^2 &= < fg, fg > \\ &= c^2(fg, fg) \\ &= c^2||fg||^2 \\ &\leq c^4||f||^2||g||^2 \\ &= c^2(f,f)\,c^2(g,g) \\ &= < f, f >< g, g > \\ &= |||f|||^2|||g|||^2, \end{aligned}$$

das heißt $|||fg||| \leq |||f|||\,|||g|||$. ■

Im Folgenden wird das neue Skalarprodukt wieder mit $(,)$ und die neue Norm wieder mit $||\ ||$ bezeichnet.

Aussage 27
Es gilt:

a) K *ist links* $L^2(G)$*-invariant.*

b) $$\left.\begin{array}{l} ||\overline{U_f}(g)|| \leq ||f||\,||g|| \\ ||\overline{V_f}(g)|| \leq ||g||\,||f|| \end{array}\right\} \quad \textit{für } f \in K,\ g \in L^2(G)$$

Beweis:

a) Nach (19) ist K links $A(G)$-invariant. Da die Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $K \subset A(G)$ stetig ist, ist K sogar links $L^2(G)$-invariant.

b) Die zweite Behauptung wurde für $g \in A(G)$ schon im Beweis von (26) gezeigt. Auch diese Eigenschaft überträgt sich auf ganz $L^2(G)$. Aus der Tatsache, dass Links- und Rechtsmultiplikation mit demselben Element einer Hilbertalgebra dieselbe Operatornorm haben ([4], Seite 267, vii), folgt schließlich die letzte Behauptung. ■

Aussage 28
Für $f \in K$ *folgt aus* $f^*f = 0$*, dass* $f = 0$ *erfüllt ist.*

Beweis:

Für alle $g \in A(G)$ ergibt sich $(fg, fg) = (f^*f, gg^*) = 0$, also $fg = 0$. Für $g, h \in A(G)$ folgt nun $(f, hg^*) = (fg, h) = 0$. Da der von den Produkten hg^* aufgespannte Vektorraum dicht in $A(G)$ liegt, ist $f = 0$. ■

Literatur: [1], Seite 458

6 Direkte Zerlegung

Wie bisher seien G die gegebene Gruppe und $A(G)$ die in (6) eingeführte maximale Hilbertalgebra. L sei die in (19) definierte Teildarstellung der linksregulären Darstellung von $A(G)$; K ist der Darstellungsraum von L. Um den Beweis von Satz 1 zu vollenden, wird nun in diesem Abschnitt (22) bewiesen.

In der Originalarbeit ([1], Seite 458 bis 459) wird an dieser Stelle des Beweises behauptet, dass K eine H^*-Algebra sei. Im weiteren Verlauf wird der Satz über die direkte Zerlegbarkeit einer H^*-Algebra in minimale Linksideale verwendet und außerdem gezeigt, dass die minimalen Linksideale in K gleichzeitig L-irreduzible, abgeschlossene Unterräume von K sind.

K ist jedoch im Allgemeinen nicht abgeschlossen gegenüber der Involution * und daher nicht zwingend eine H^*-Algebra. Damit ist auch die Äquivalenz von minimalen Linksidealen und L-irreduziblen, abgeschlossenen Teilräumen im Allgemeinen nicht mehr gültig.

Der Ausweg besteht darin, dass die verwendeten Sätze über H^*-Algebren abgeändert werden, indem statt Linksidealen links $L^2(G)$-invariante Teilräume von K betrachtet werden.

Aussage 29
Ist H *ein Hilbertraum und* $R : H \to H$ *ein selbstadjungierter Operator, so gilt*

$$||R^n|| = ||R||^n \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

Für $R = 0$ ist die Behauptung trivial; es sei also $R \neq 0$. Für Zweierpotenzen $n = 2^k$ kann die Aussage durch vollständige Induktion bewiesen werden:

$||R^1|| = ||R||^1$ ist trivial.

Nun gelte bereits $||R^{2^k}|| = ||R||^{2^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$||R^{2^{k+1}}|| = ||R^{2^k}(R^*)^{2^k}|| = ||R^{2^k}(R^{2^k})^*|| = ||R^{2^k}||^2 = ||R||^{2^{k+1}}.$$

Nun sei n eine beliebige natürliche Zahl und $2^k \geq n$. Wäre $||R^n|| < ||R||^n$, so würde

$$||R^{2^k}|| \leq ||R^n||\ ||R^{2^k-n}|| < ||R||^n||R^{2^k-n}||$$

folgen; $||R^{2^k-n}|| = 0$ würde nämlich

$$||R||^{2^k} = ||R^{2^k}|| \leq ||R^n||\ ||R^{2^k-n}|| = 0,$$

also $R = 0$ implizieren. Weiter könnte man

$$||R^{2^k}|| < ||R||^n||R^{2^k-n}|| \leq ||R||^n||R||^{2^k-n} = ||R||^{2^k}$$

folgern, im Widerspruch zum bereits bewiesenen Teil. Demnach gilt $||R^n|| \geq ||R||^n$ und aufgrund von $||R^n|| \leq ||R||^n$ auch $||R^n|| = ||R||^n$. ■

Aussage 30
Jeder vom Nullraum verschiedene, links $L^2(G)$-invariante Teilraum von K enthält ein irreduzibles, selbstadjungiertes, idempotentes Element $e \neq 0$.

Beweis:

Wie in (6) sei wieder $\overline{U_a}$ die stetige Fortsetzung der Linksmultiplikation mit a auf ganz $L^2(G)$. Für $a \in K$ sei $|a| := \sup\{||\overline{U_a}(h)||;\ h \in L^2(G),\ ||h|| = 1\}$. Ist $||\overline{U_a}(h)|| = 0$ für alle $h \in L^2(G)$ mit $||h|| = 1$, insbesondere für alle $h \in A(G)$, so folgt $(a, gh^*) = (ah, g) = 0$ für alle $g, h \in A(G)$. Da die gh^* total in $A(G)$ liegen, ergibt sich $a = 0$. $|\ |$ ist also eine Norm auf K; die übrigen Normeigenschaften folgen sofort aus den Normeigenschaften von $||\ ||$. Wegen $||\overline{U_a}(h)|| \leq ||a||\ ||h||$ für $h \in L^2(G)$ (siehe Aussage 27) gilt $|a| \leq ||a||$.

Ist nun $b \neq 0$ ein Element von I, so ist wegen (28) $b^*b \neq 0$ und wegen $b^* \in A(G) \subset L^2(G)$ auch $b^*b \in I$. Multipliziert man b^*b mit einem geeigneten positiven Skalar, so erhält man ein selbstadjungiertes Element $a \in I$ mit $|a| = 1$. Aufgrund von $(\overline{U_a}(g), h) = (g, \overline{U_{a^*}}(h)) = (g, \overline{U_a}(h))$ für beliebige $g, h \in L^2(G)$ ist die Abbildung $h \mapsto \overline{U_a}(h)$ ein selbstadjungierter Operator auf $L^2(G)$. Nach (29) folgt also $|a^n| = 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Es lässt sich nun beweisen, dass $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist: Für $n \geq m$ gelten nämlich die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
(a^{2n}, a^{2m}) &= (a^{2n-2m}a^{2m}, a^{2m}) \\
&\leq ||a^{2n-2m}a^{2m}||\ ||a^{2m}|| \\
&\leq |a^{2n-2m}|\ ||a^{2m}||^2 \\
&= (a^{2m}, a^{2m})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a^{2n},a^{2n}) &= (a^{2n-2m}a^{n+m},a^{n+m})\\ &\leq ||a^{2n-2m}a^{n+m}||\,||a^{n+m}||\\ &\leq |a^{2n-2m}|\,||a^{n+m}||^2\\ &= (a^{n+m},a^{n+m})\\ &= (a^{2n},a^{2m}).\end{aligned}$$

Es ergibt sich also für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$

$$1 = |a^{2n}|^2 \leq ||a^{2n}||^2 = (a^{2n},a^{2n}) \leq (a^{2n},a^{2m}) \leq (a^{2m},a^{2m}).$$

Dies zeigt, dass $(a^{2n},a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit Limes $\lambda \geq 1$ ist und dass außerdem (a^{2n},a^{2m}) gegen λ strebt, falls n und m gegen ∞ gehen. Daher gilt für $n, m \to \infty$:

$$\begin{aligned}||a^{2n}-a^{2m}||^2 &= (a^{2n}-a^{2m},a^{2n}-a^{2m})\\ &= (a^{2n},a^{2n})-(a^{2n},a^{2m})-(a^{2m},a^{2n})+(a^{2m}a^{2m}) \to 0.\end{aligned}$$

$(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge.

Weil K vollständig ist, existiert $e' := \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n}$, wobei aus $||a^{2n}|| \geq |a^{2n}| = 1$ auch $||e'|| \geq 1$ und somit $e' \neq 0$ folgt. Außerdem ist e' als Limes selbstadjungierter Elemente ebenfalls selbstadjungiert. Die Beziehung $e'^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a^{4n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = e'$ zeigt die Idempotenz von e'. Schließlich liegt $e' = \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n+2} = (\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n})a^2 = e'a^2$ wegen $a^2 \in I$ im links $L^2(G)$-invarianten Unterraum I.

Es ist noch möglich, dass e' reduzibel ist. In diesem Fall gibt es zwei orthogonale, selbstadjungierte, idempotente Elemente $e_1, e_2 \in K$ mit $e_1, e_2 \neq 0$ und $e_1 + e_2 = e'$. Dann ist

$$(e_1e_2,e_1e_2) = (e_1,e_1e_2^2) = (e_1,e_1e_2) = (e_1^2,e_2) = (e_1,e_2) = 0,$$

also $e_1e_2 = 0$ und weiter $e_1e' = e_1^2 + e_1e_2 = e_1$. Wegen $e' \in I$ liegt daher auch e_1 (und damit auch e_2) in I. Da aber die Beziehung $||e_1||^2 + ||e_2||^2 = ||e'||^2$ besteht, und da für idempotente Elemente $f \neq 0$ immer $||f|| \geq 1$ erfüllt ist, erhält man durch Fortsetzung des Verfahrens nach endlich vielen Schritten ein von 0 verschiedenes, irreduzibles, selbstadjungiertes, idempotentes Element $e \in I$. ■

Aussage 31

Eine nichtleere Teilmenge I von K ist genau dann ein minimaler, links $L^2(G)$-invarianter Teilraum von K, wenn $I = Ke$ mit einem irreduziblen, idempotenten, selbstadjungierten Element $e \neq 0$ von K ist.

Beweis:

Zunächst sei I ein minimaler, links $L^2(G)$-invarianter Teilraum von K. Nach (30) besitzt I ein irreduzibles, selbstadjungiertes, idempotentes Element $e \neq 0$. Dann ist Ke Untervektorraum von I, wegen $0 \neq e = e^2 \in Ke$ ungleich dem Nullraum und wegen der Links-$L^2(G)$-Invarianz von K (siehe Aussage 27) selbst links $L^2(G)$-invariant. Aus der Minimalität von I ergibt sich $I = Ke$.

Umgekehrt sei nun $I = Ke$, wobei $e \neq 0$ ein irreduzibles, selbstadjungiertes, idempotentes Element von K sein soll. Wie schon im ersten Teil des Beweises gezeigt, ist I ein links $L^2(G)$-invarianter, vom Nullraum verschiedener Teilraum von K.

Zu zeigen ist nur noch die Minimalität von I: Ist J ein von $\{0\}$ verschiedener, links $L^2(G)$-invarianter Unterraum von I, so enthält J nach (30) ein selbstadjungiertes, idempotentes Element $j \neq 0$. Es sei $e_1 := ej$ und $e_2 := e - e_1$. Da $j \in J \subset I = Ke$ ist, gibt es ein $a \in K$, so dass $j = ae$ ist. Weiter folgt

$$je_1 = jej = (ae)e(ae) = (ae)^2 = j^2 = j \neq 0;$$

somit muss e_1 ungleich 0 sein. Außerdem ergibt sich $je = ae^2 = ae = j$ und folglich $e_1 = ej = eje$.

Nun zeigen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
e_1^* &= (eje)^* = e^*j^*e^* = eje = e_1, \\
e_2^* &= (e - e_1)^* = e^* - e_1^* = e - e_1 = e_2, \\
e_1^2 &= (eje)j = e_1 j = ej^2 = ej = e_1, \\
e_2^2 &= (e - e_1)^2 = e^2 - ee_1 - e_1 e + e_1^2 = e - e^2 j - eje + e_1 \\
&= e - ej - ej + ej = e - ej = e_2, \\
(e_1, e_2) &= (ej, e - ej) = (e, ej - ej^2) = (e, ej - ej) = 0,
\end{aligned}$$

dass $e = e_1 + e_2$ eine Reduktion von e darstellt.

Da e als irreduzibel vorausgesetzt wurde und e_1 ungleich 0 ist, muss $e_1 = e$ sein. Weil j im links $L^2(G)$-invarianten Unterraum J liegt, kann man auf $e = e_1 = ej \in J$ und auf $I = Ke \subset J$ schließen, also auf $I = J$. Damit erweist sich I als minimal. ■

Aussage 32

Jeder minimale, links $L^2(G)$-invariante Teilraum I von K ist abgeschlossen.

Beweis:

Nach (31) existiert ein idempotentes e mit der Eigenschaft $I = Ke$. Konvergiert nun die Folge $(a_n e)_{n \in \mathbb{N}}$ aus I gegen $k \in K$, so folgt daraus

$$k = \lim_{n \to \infty} a_n e = \lim_{n \to \infty} a_n e^2 = (\lim_{n \to \infty} a_n e)e = ke \in Ke.$$

Also ist I abgeschlossen. ■

Aussage 33

K kann in eine direkte Summe von paarweise orthogonalen, minimalen, links $L^2(G)$-invarianten Teilräumen zerlegt werden.

Beweis:

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Systeme der Form $\{e_r;\ r \in R\}$, wobei die zu einer Indexmenge R gehörenden e_r paarweise orthogonale, irreduzible, selbstadjungierte, idempotente Elemente von K und ungleich 0 sein sollen. Da K nach (27) links $L^2(G)$-invariant ist, folgt aus (30), dass $\mathcal{M}$ nicht leer ist. Ist nun $\{S_p;\ p \in P\} \subset \mathcal{M}$ eine nichtleere Kette, so gehört auch $\bigcup_{p \in P} S_p$ zu $\mathcal{M}$, da die Elemente von $\bigcup_{p \in P} S_p$ paarweise orthogonal, irreduzibel, selbstadjungiert, idempotent und ungleich 0 sind. Es lässt sich also das Zornsche Lemma anwenden, sodass es eine maximale Menge $\{e_q;\ q \in Q\}$ in $\mathcal{M}$ gibt. Nun sind die Mengen Ke_q (mit $q \in Q$) gemäß (31) und (32) minimale, links $L^2(G)$-invariante (abgeschlossene) Unterräume von K. Aus

$$(a_1 e_p, a_2 e_q) = (e_p e_q, a_1^* a_2) = 0 \quad \text{für } a_1, a_2 \in K,\ p \neq q$$

folgt sogar, dass die Teilräume Ke_q paarweise orthogonal sind.

Jetzt kann gezeigt werden, dass $K = \bigoplus\limits_{q \in Q} Ke_q$ ist: Wäre nämlich $J := \bigoplus\limits_{q \in Q} Ke_q$ eine echte Teilmenge von K, so wäre $K \ominus J$ ein abgeschlossener Unterraum von K und verschieden vom Nullraum. Nun ergäbe sich, falls die stetige Fortsetzung der Rechtsmultiplikation mit g beziehungsweise h auf ganz $L^2(G)$ wieder wie in (6) mit $\overline{V_g}$ beziehungsweise $\overline{V_h}$ bezeichnet wird,

$$(\overline{V_g}(f), h) = (g, \overline{V_h}(f^*)) = 0 \quad \text{für } f \in L^2(G),\ g \in K \ominus J,\ h \in J;$$

J ist nämlich links $L^2(G)$-invariant, und es gilt somit $\overline{V_h}(f^*) \in J$. Da die obige Gleichung die Links-$L^2(G)$-Invarianz von $K \ominus J$ beweist, gäbe es – wieder nach (30) – ein irreduzibles, selbstadjungiertes, idempotentes Element $e \neq 0$ aus $K \ominus J$, das zu allen e_q mit $q \in Q$ orthogonal wäre. Aus dem Widerspruch zur Maximalität von $\{e_q;\ q \in Q\}$ folgt daher $K = J = \bigoplus\limits_{q \in Q} Ke_q$. ■

Beweis von Aussage 22:

Nach dem letzten Ergebnis (33) genügt es zu zeigen, dass jeder minimale, links $L^2(G)$-invariante Teilraum I von K ein L-irreduzibler, abgeschlossener Teilraum ist. Aus der Links-$L^2(G)$-Invarianz folgt sofort die Links-$A(G)$-Invarianz, das heißt die L-Invarianz von I. Außerdem ist I nach (32) abgeschlossener Unterraum von K.

Nun sei $I_1 \neq \{0\}$ ein echter, L-invarianter, abgeschlossener Unterraum von I. Da die Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $I_1 \subset A(G)$ stetig ist, folgt aus der Links-$A(G)$-Invarianz von I_1 die Links-$L^2(G)$-Invarianz. Dies bedeutet aber einen Widerspruch zur Minimalität von I. I ist folglich L-irreduzibel. ■

Gleichzeitig sind damit Aussage 11 und Satz 1, das Thema dieser Arbeit, bewiesen.

Literatur: [9], Seite 46 bis 50

Literatur

[1] R. A. Kunze: A note on square-integrable representations,
Journal of Functional Analysis 6, Seite 454 bis 459 (1970).

[2] R. A. Kunze, E. M. Stein: Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the real 2×2 real unimodular group,
American Journal of Mathematics 82, Seite 1 bis 62 (1960)

[3] J. Dixmier: Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann),
Gauthier-Villars, Paris 1957.

[4] M. A. Rieffel: Square-integrable representations of Hilbert algebras,
Journal of Functional Analysis 3, Seite 265 bis 300 (1969)

[5] M. A. Naimark: Normed rings,
Noordhoff, The Netherlands, 1959.

[6] M. A. Neumark: Normierte Algebren,
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

[7] L. H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis,
Van Nostrand, New York 1953.

[8] I. E. Segal, R. A. Kunze: Integrals and operators,
Mc Graw Hill 1968.

[9] S. A. Gaal: Linear analysis and representation theory,
Springer 1973.