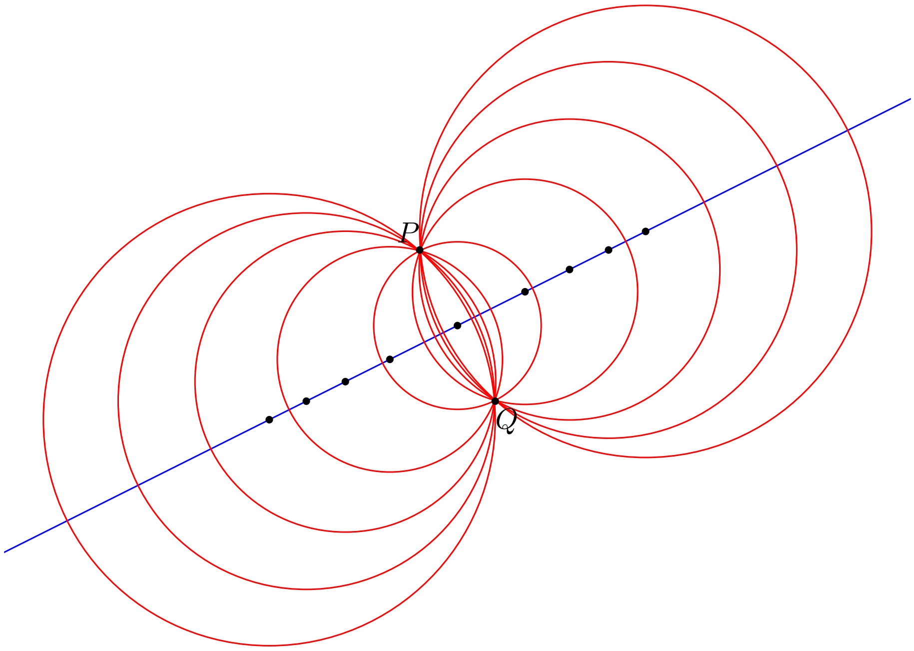
Berührkreisaufgaben

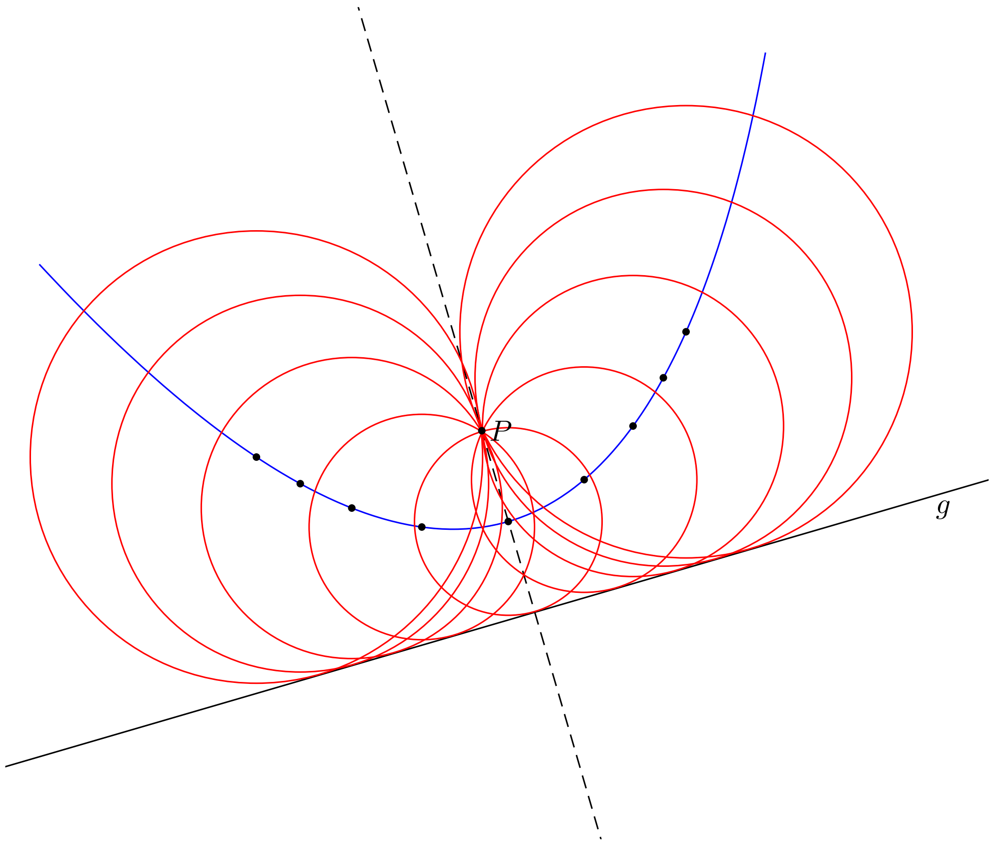
Aufgabe 1 (zwei Punkte gegeben)

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte P und Q. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die durch P und Q gehen, die Mittelsenkrechte von $[PQ]$.



Aufgabe 2 (Punkt und Gerade gegeben)

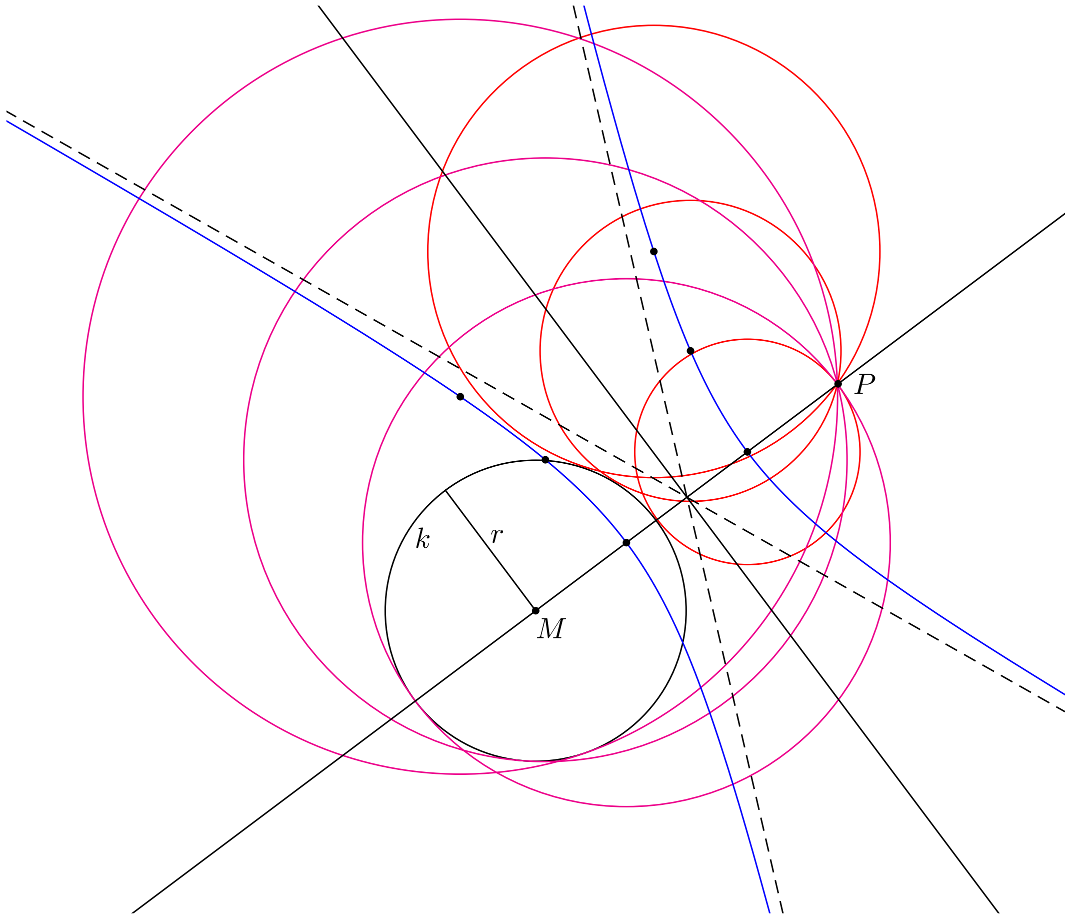
Gegeben seien ein Punkt P und eine Gerade g, die nicht durch P geht. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die durch P gehen und g berühren, die Parabel mit der Leitlinie g und dem Brennpunkt P.



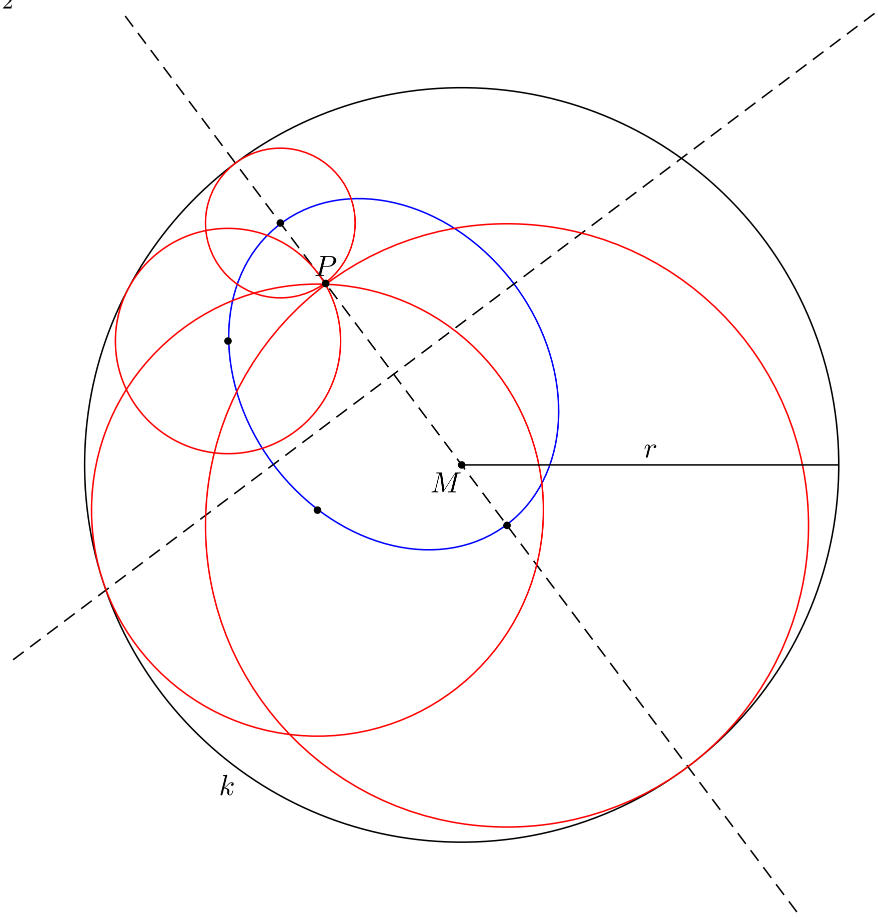
Grenzfall: Liegt der Punkt P auf der Geraden g, so erhält man keine Parabel, sondern das Lot zu g in P.

Aufgabe 3 (Punkt und Kreis gegeben)

Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die k berühren und durch P gehen, die Hyperbel mit den Brennpunkten P und M und der reellen Halbachse $\frac{1}{2}r$.



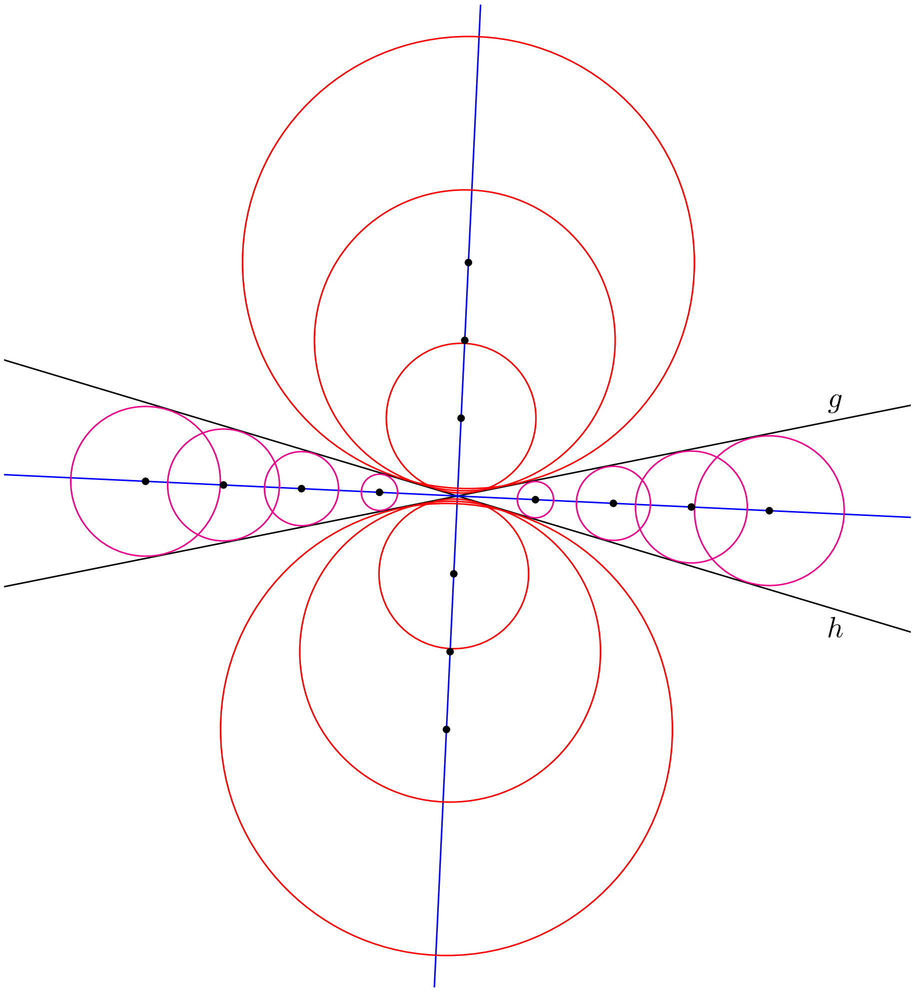
Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P innerhalb des Kreises. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die k berühren und durch P gehen, die Ellipse mit den Brennpunkten P und M und der großen Halbachse $\frac{1}{2}r$.



Grenzfall: Liegt der Punkt P auf dem Kreis k, so erhält man keine Hyperbel oder Ellipse, sondern die Verbindungsgerade PM.

Aufgabe 4 (zwei Geraden gegeben)

Gegeben seien zwei sich schneidende Geraden g und h. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die g und h berühren, das Paar der Winkelhalbierenden von g und h.

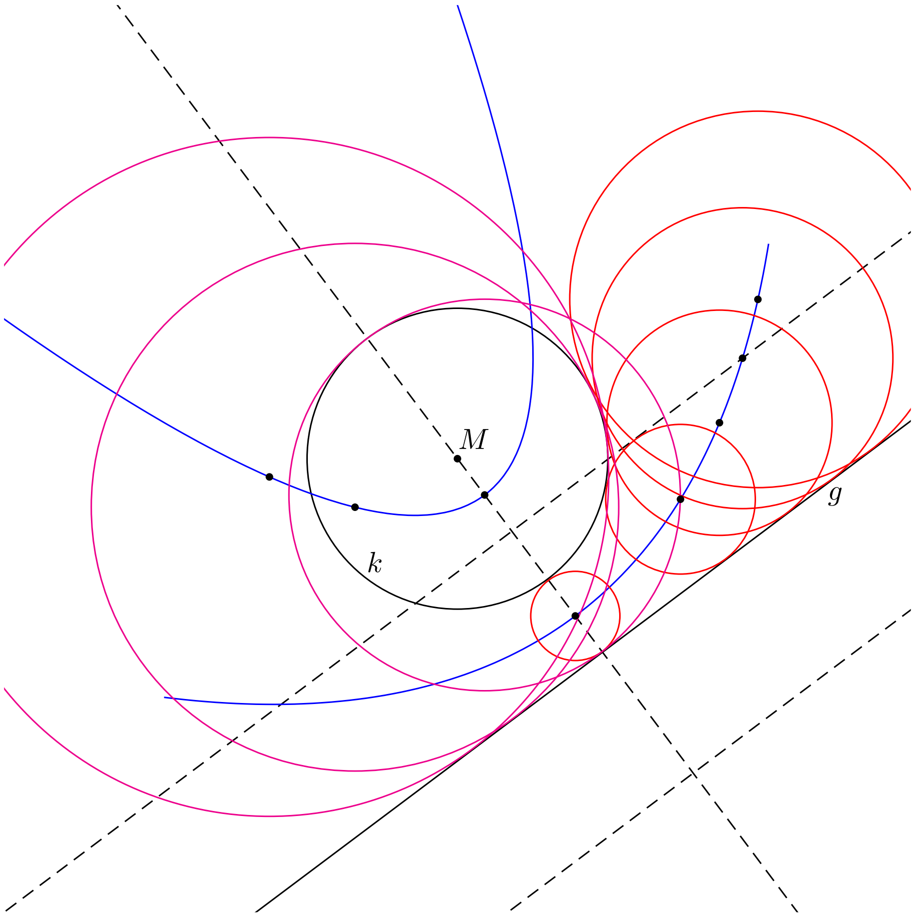


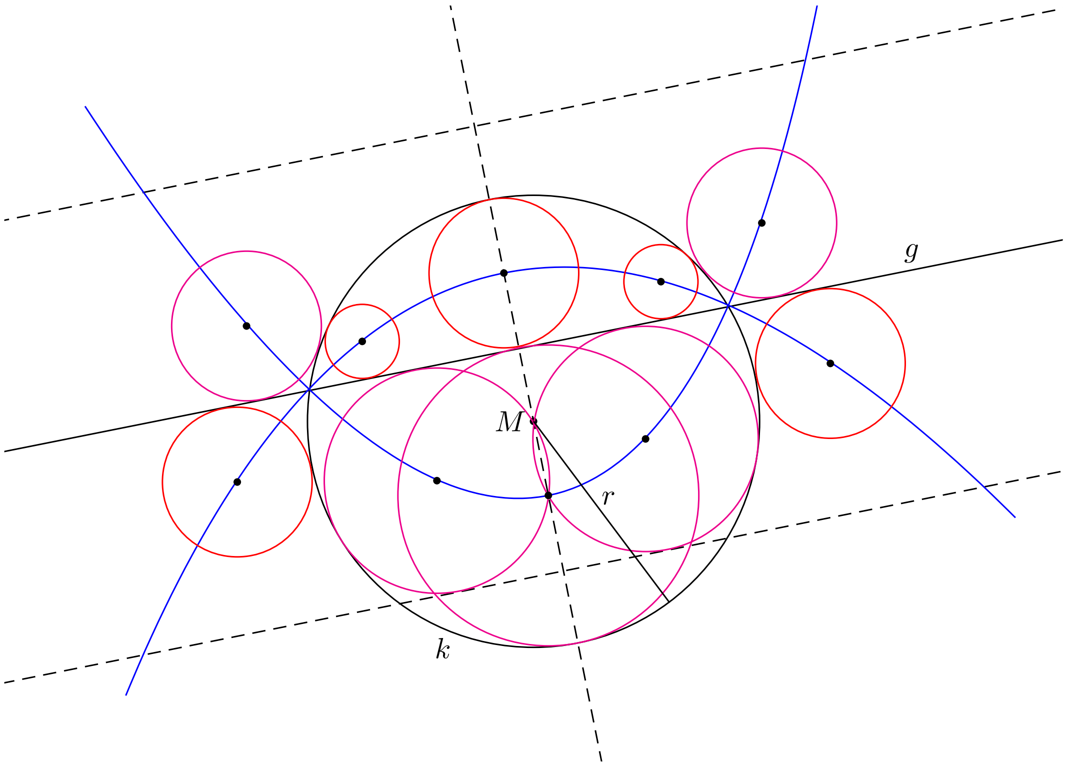
Grenzfall: Sind die Geraden g und h zueinander parallel, aber nicht identisch, so erhält man statt des Winkelhalbierendenpaares die Mittelparallele von g und h.

Aufgabe 5 (Gerade und Kreis gegeben)

Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r sowie eine Gerade g. Dann ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die k und g berühren, das Paar von Parabeln, die M als Brennpunkt und eine Parallele zu g im Abstand r als Leitlinie haben.

Bemerkung: Diese Aussage gilt sowohl dann, wenn g und k keinen Schnittpunkt haben (erste Zeichnung), als auch dann, wenn g und k genau zwei Schnittpunkte haben (zweite Zeichnung); diese beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass die Parabeln entweder in gleiche oder entgegengesetzte Richtung geöffnet sind. Im Grenzfall (genau ein Schnittpunkt, das heißt Berührung von g und k) erhält man statt eines Parabelpaares das Lot zu g durch M.

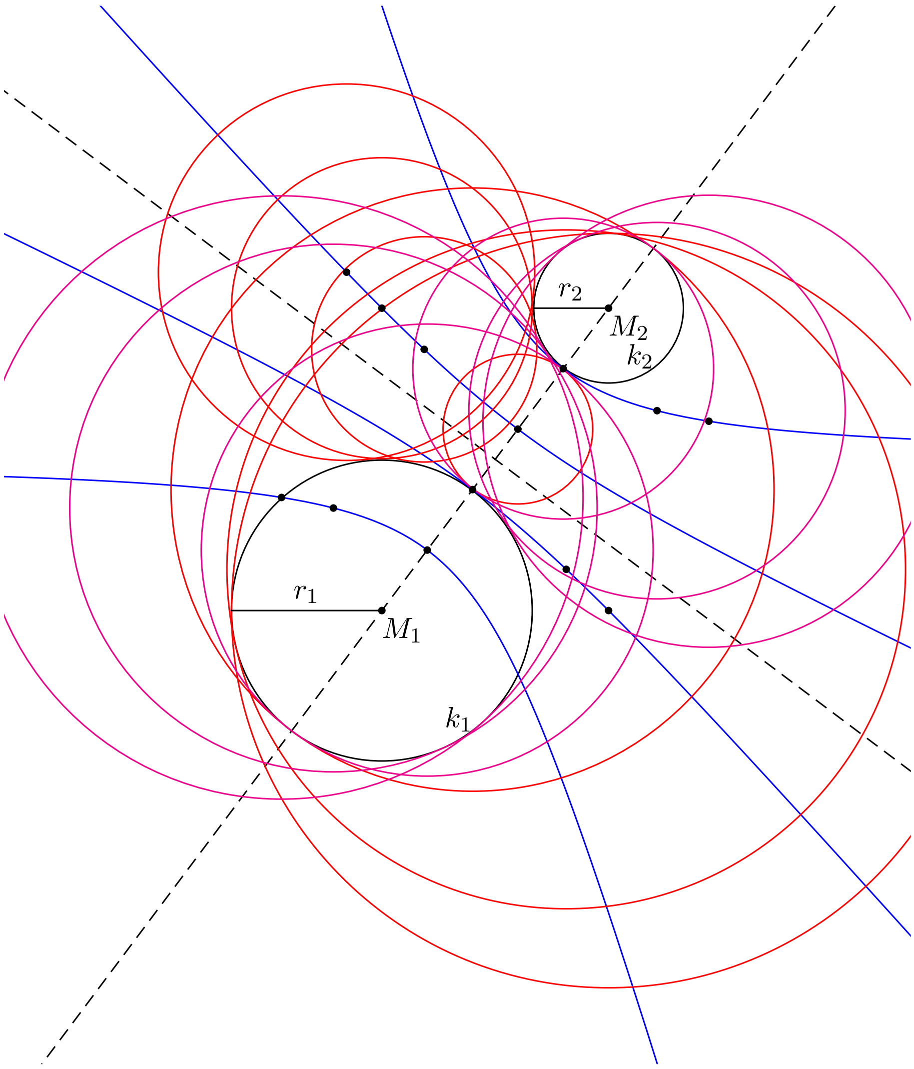




g
M
r
k

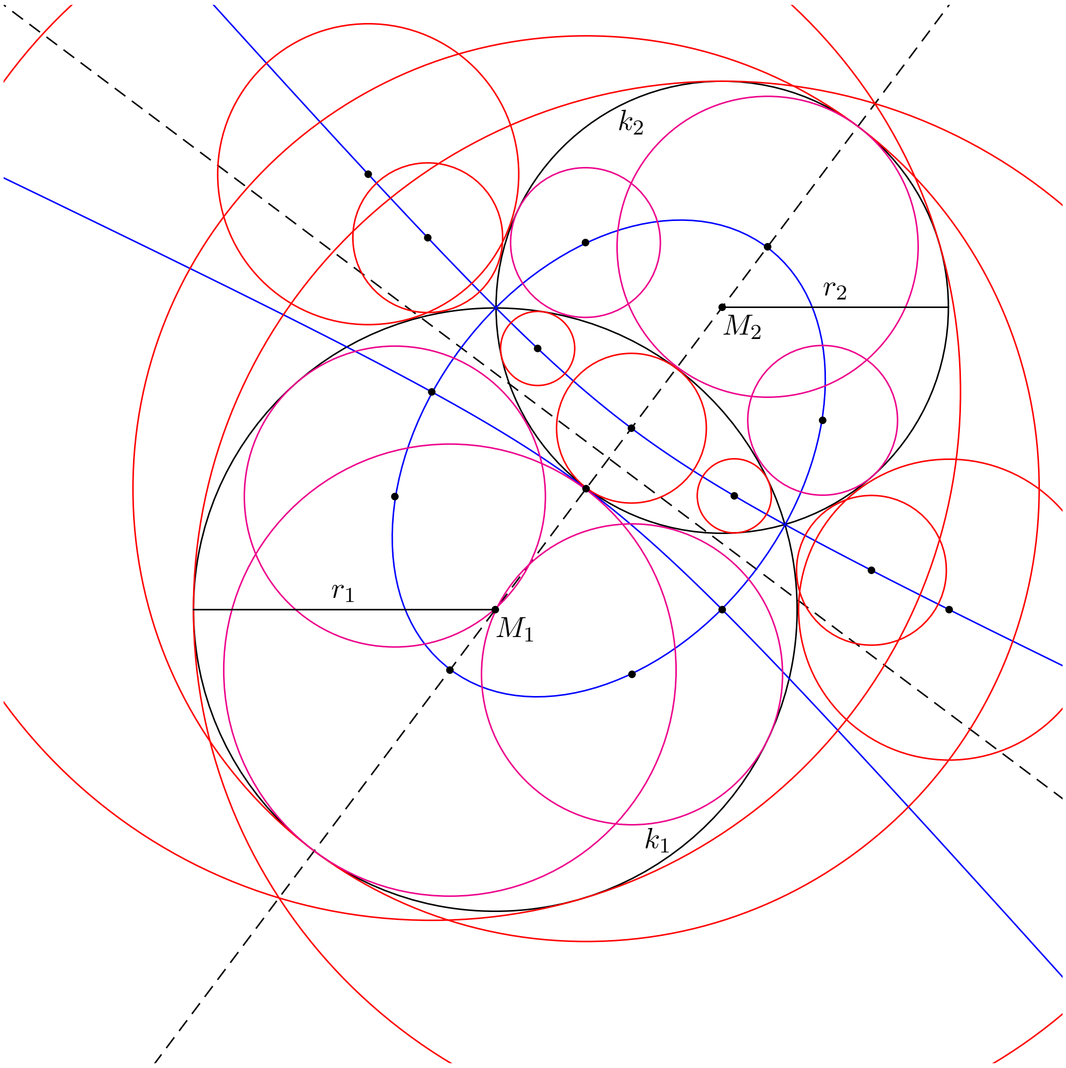
Aufgabe 6 (zwei Kreise gegeben)

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2, die einander nicht schneiden. Die Mittelpunkte seien mit M_1 bzw. M_2 bezeichnet, die Radien mit r_1 bzw. r_2. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die k_1 und k_2 berühren, das Paar von Hyperbeln mit den Brennpunkten M_1 und M_2, deren reelle Halbachsen gleich $\frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ bzw. gleich $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ sind.



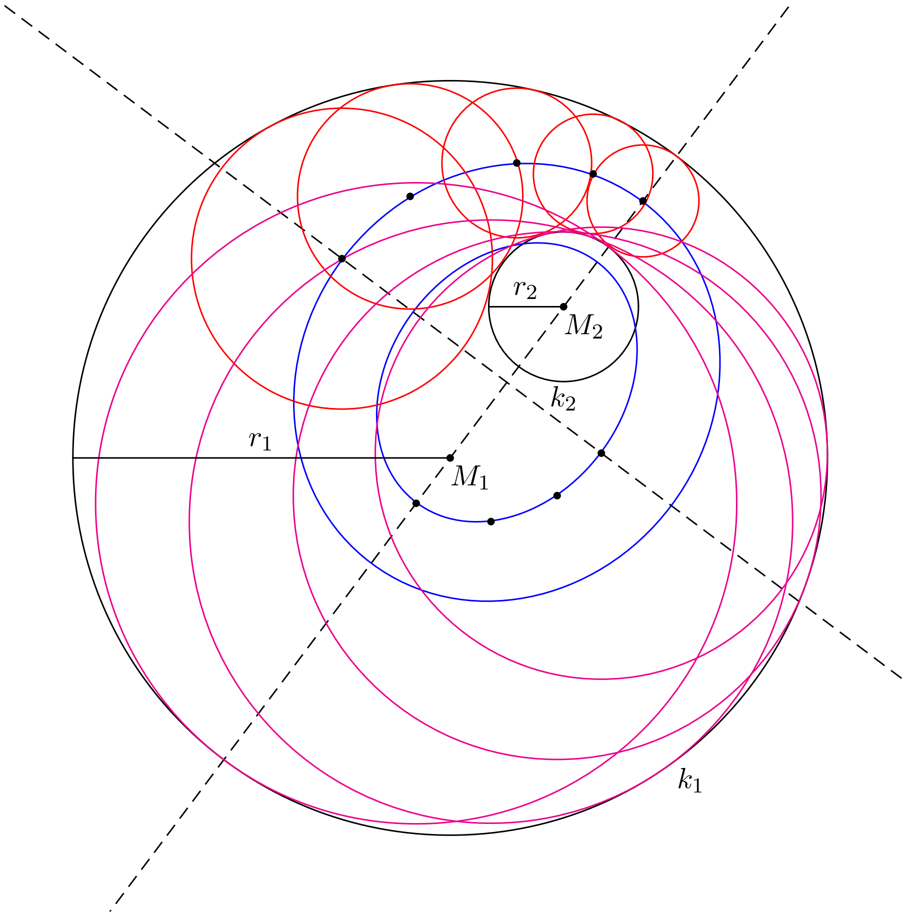
Grenzfall 1: Berühren sich k_1 und k_2 von außen, so erhält man die Hyperbel mit den Brennpunkten M_1 und M_2 und der reellen Halbachse $\frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ sowie die Verbindungsgerade von M_1 und M_2.

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2, die einander schneiden. Die Mittelpunkte seien mit M_1 bzw. M_2 bezeichnet, die Radien mit r_1 bzw. r_2. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die k_1 und k_2 berühren, die Hyperbel mit den Brennpunkten M_1 und M_2 und der reellen Halbachse $\frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ zusammen mit der Ellipse, die durch dieselben Brennpunkte und die große Halbachse $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ festgelegt ist.



Grenzfall 2: Berühren sich k_1 und k_2 (mit verschiedenen Radien) von innen, so erhält man die Ellipse mit den Brennpunkten M_1 und M_2 und der großen Halbachse $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ sowie die Verbindungsgerade von M_1 und M_2.

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2, von denen einer im Inneren des anderen liegt. Die Mittelpunkte seien mit M_1 bzw. M_2 bezeichnet, die Radien mit r_1 bzw. r_2. Dann ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die k_1 und k_2 berühren, das Paar von Ellipsen mit den Brennpunkten M_1 und M_2, deren große Halbachsen gleich $\frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ bzw. gleich $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ sind.



Letzte Änderung: 2017-09-28