Bestimmung eines Dreiecks
aus einer Seite und beiden nicht zugehörigen Höhen

Mögliche Kombinationen: (a, h_b, h_c), (b, h_a, h_c), (c, h_a, h_b)

Gegeben:	a, h_b, h_c
Gesucht:	b, c

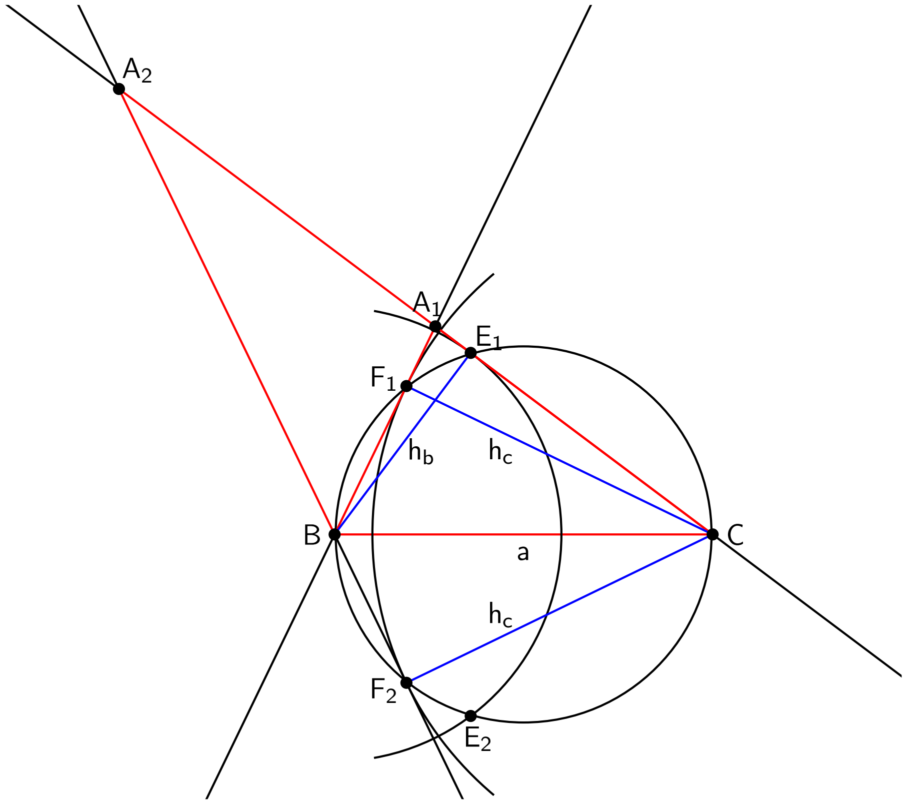
Konstruktion:

Strecke [BC] mit Länge a
E_1 liegt
1. auf dem Thaleskreis über [BC]
2. auf dem Kreis um B mit Radius h_b

F_1 liegt
1. auf dem Thaleskreis über [BC]
2. auf dem Kreis um C mit Radius h_c

A_1 liegt
1. auf der Geraden BF_1
2. auf der Geraden CE_1

2. Lösung entsprechend!



Begründung der Konstruktion:

Der Höhenfußpunkt E_1 bzw. E_2 muss wegen des rechten Winkels auf dem Thaleskreis über $[\mathsf{BC}]$ liegen. Außerdem muss $\overline{\mathsf{BE}_1} = h_b$ bzw. $\overline{\mathsf{BE}_2} = h_b$ gelten. Entsprechendes gilt für den Höhenfußpunkt F_1 bzw. F_2.

Rechnung:

Die Winkelgrößen β und γ lassen sich jeweils aus der Seitenlänge a und einer Höhe (h_c bzw. h_b) berechnen. Dabei ist allerdings der Quadrant (1. oder 2.) noch unbekannt.

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{h_c}{a} \\ \sin\gamma &= \frac{h_b}{a} \end{aligned}$$

Für die zugehörigen Kosinuswerte folgt:

$$\begin{aligned} |\cos\beta| &= \frac{\sqrt{a^2 - h_c^2}}{a} \\ |\cos\gamma| &= \frac{\sqrt{a^2 - h_b^2}}{a} \end{aligned}$$

Bemerkung zur folgenden Fallunterscheidung: Wenn, wie in der Zeichnung, $h_b < h_c$ gilt, folgt daraus $b > c$ und $\beta > \gamma$. Sowohl für $\beta < 90°$ als auch für $\beta > 90°$ kann dann auf $\gamma < 90°$ geschlossen werden. Wird dagegen $h_b > h_c$ vorausgesetzt, ist eine Fallunterscheidung zwischen $\gamma < 90°$ und $\gamma > 90°$ sinnvoll. Die Ergebnisse sind in beiden Fällen die gleichen.

1. Lösung (mit $\beta < 90^\circ$, also $\cos\beta > 0$):

Anwendung des Sinussatzes ergibt:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin(180^\circ - \alpha)} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma} \\
&= \frac{a \cdot \dfrac{h_b}{a}}{\dfrac{h_c}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{a^2 - h_b^2}}{a} + \dfrac{\sqrt{a^2 - h_c^2}}{a} \cdot \dfrac{h_b}{a}} \\
&= \frac{a^2\, h_b}{h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} + h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}}
\end{aligned}
$$

Die Seitenlänge b_1 erhält man aus der Beziehung $b_1\, h_b = c_1\, h_c$ (siehe Flächenformel!):

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{c_1\, h_c}{h_b} \\
&= \frac{a^2\, h_c}{h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} + h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}}
\end{aligned}
$$

2. Lösung (mit $\beta > 90°$, also $\cos\beta < 0$):

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin(180° - \alpha)} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \\
&= \frac{a \sin\gamma}{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma} \\
&= \frac{a \cdot \dfrac{h_b}{a}}{\dfrac{h_c}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{a^2 - h_b^2}}{a} - \dfrac{\sqrt{a^2 - h_c^2}}{a} \cdot \dfrac{h_b}{a}} \\
&= \frac{a^2\, h_b}{h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} - h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}}
\end{aligned}
$$

Damit das Ergebnis auch für $h_b > h_c$ richtig ist, sind im Nenner Betragsstriche zu setzen:

$$
c_2 = \frac{a^2\, h_b}{\left|h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} - h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}\right|}
$$

Für b_2 erhält man:

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{c_2 h_c}{h_b} \\
&= \frac{a^2\, h_c}{\left|h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} - h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}\right|}
\end{aligned}
$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 26. März 2023