Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, anliegendem Winkel und nicht zugehöriger Seitenhalbierender

Mögliche Kombinationen: (a, β, s_c), (a, γ, s_b), (b, α, s_c), (b, γ, s_a), (c, α, s_b), (c, β, s_a)

Gegeben:	$a,\ \beta,\ s_c$
Gesucht:	c

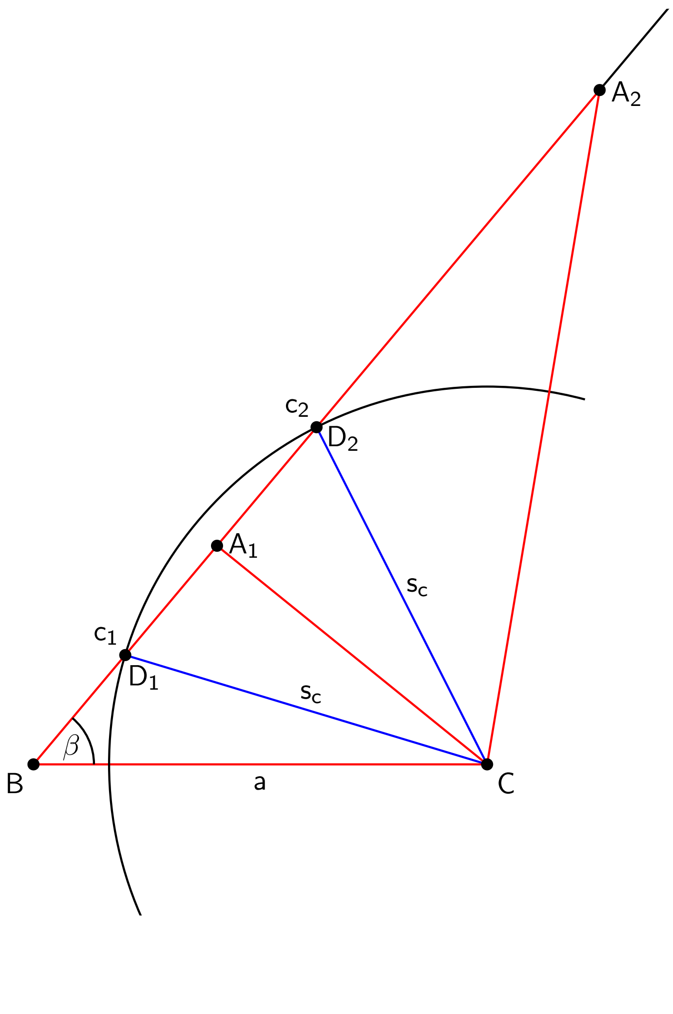
Konstruktion:

Strecke [BC] mit Länge a
D_1 liegt

1. auf dem freien Schenkel von β, angetragen an [BC] in B
2. auf dem Kreis um C mit Radius s_c

A_1 ist der Spiegelpunkt von B bezüglich D_1 (Punktspiegelung)

2. Lösung entsprechend!



Rechnung:

1. Lösung:

Als Hilfswinkel werden die restlichen Innenwinkel des Teildreiecks $\mathsf{BCD_1}$ verwendet, also $\delta_1 = \angle\, \mathsf{BD_1C} > 90°$ und $\varepsilon_1 = \angle\, \mathsf{D_1CB}$. Der Sinussatz ergibt für dieses Teildreieck:

$$\sin\delta_1 = \frac{a\sin\beta}{s_c}$$

Als Folgerung erhält man den zugehörigen Kosinuswert:

$$\cos\delta_1 = -\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{s_c^2}}$$

Für den anderen Hilfswinkel gilt aufgrund der Winkelsumme:

$$\varepsilon_1 = 180° - \beta - \delta_1$$

Nun wendet man den Kosinussatz und das Additionstheorem für den Kosinus auf das Teildreieck $\mathsf{BCD_1}$ an:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{BD_1}}^2 &= a^2 + s_c^2 - 2as_c\cos\varepsilon_1 \\
&= a^2 + s_c^2 + 2as_c\cos(180° - \varepsilon_1) \\
&= a^2 + s_c^2 + 2as_c\cos(\beta + \delta_1) \\
&= a^2 + s_c^2 + 2as_c\,(\cos\beta\cos\delta_1 - \sin\beta\sin\delta_1)
\end{aligned}$$

Setzt man hier die obigen Zwischenergebnisse ein, so folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{BD_1}}^2 &= a^2 + s_c^2 + 2as_c\left(-\cos\beta\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{s_c^2}} - \sin\beta\,\frac{a\sin\beta}{s_c}\right) \\
&= a^2 + s_c^2 - 2a\cos\beta\sqrt{s_c^2 - a^2\sin^2\beta} - 2a^2\sin^2\beta
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Seitenlänge c_1 berechnen:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2\,\overline{\mathsf{BD_1}} \\
&= 2\sqrt{a^2 + s_c^2 - 2a^2\sin^2\beta - 2a\cos\beta\sqrt{s_c^2 - a^2\sin^2\beta}}
\end{aligned}$$

2. Lösung:

Im Unterschied zur 1. Lösung gilt jetzt für den Hilfswinkel $\delta_2 < 90°$ und $\cos\delta_2 > 0$. Sonst verläuft die Rechnung wie bei der 1. Lösung. Für die Seitenlänge c_2 erhält man demnach:

$$c_2 = 2\sqrt{a^2 + s_c^2 - 2a^2\sin^2\beta + 2a\cos\beta\sqrt{s_c^2 - a^2\sin^2\beta}}$$

Walter Fendt, 29. März 2023