Bestimmung eines Dreiecks

aus zwei Winkeln und einer zugehörigen Seitenhalbierenden

Mögliche Kombinationen: (α, β, s_a), (α, β, s_b), (α, γ, s_a), (α, γ, s_c), (β, γ, s_b), (β, γ, s_c)

Gegeben:	$\alpha,\ \gamma,\ s_c$
Gesucht:	$a,\ b,\ c$

Konstruktion:

Strecke [A′C] mit beliebiger Länge
B′ liegt

1. auf dem freien Schenkel von α, angetragen an [A′C] in A′
2. auf dem freien Schenkel von γ, angetragen an [A′C] in C

M′ sei der Mittelpunkt von A′ und B′.
M liegt

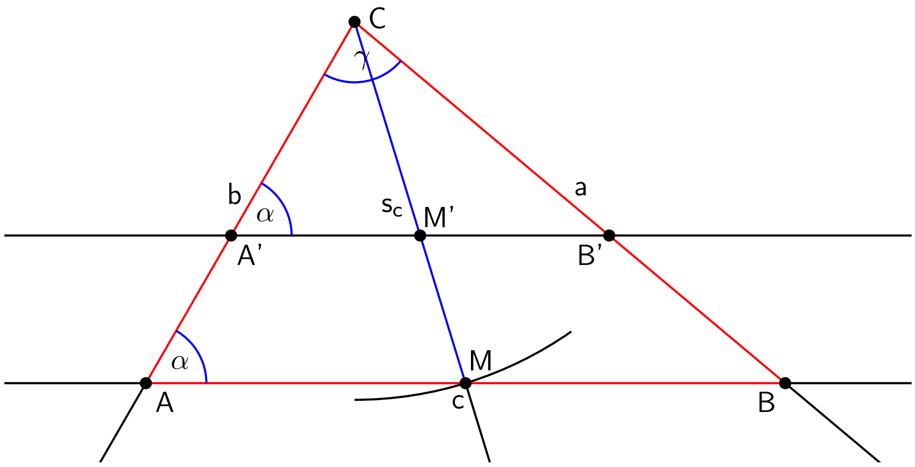
1. auf der Geraden CM′
2. auf dem Kreis um C mit Radius s_c

A liegt

1. auf der Geraden CA′
2. auf der Parallelen zu A′B′ durch M

B liegt

1. auf der Geraden CB′
2. auf der Parallelen zu A′B′ durch M



Begründung der Konstruktion:

Mithilfe der Winkel α und γ kann ein Hilfsdreieck $\mathsf{A'B'C}$ konstruiert werden, das zum gesuchten Dreieck ABC ähnlich ist. $[\mathsf{CM'}]$ ist Seitenhalbierende des Hilfsdreiecks. Durch eine geeignete zentrische Streckung mit Zentrum C wird das Hilfsdreieck in ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften überführt.

Rechnung:

Aus den zwei gegebenen Winkelgrößen erhält man unmittelbar die dritte:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

Die Seitenlängen a, b und c lassen sich durch den Umkreisradius r und die Winkelgrößen α, β, γ ausdrücken:

$$\begin{aligned} a &= 2\,r\,\sin\alpha \\ b &= 2\,r\,\sin\beta \\ c &= 2\,r\,\sin\gamma \end{aligned}$$

Aus der Formel für die Seitenhalbierende s_c erhält man durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} s_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\,r^2\sin^2\alpha + 8\,r^2\sin^2\beta - 4\,r^2\sin^2\gamma} \\ &= r\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert Rechenausdrücke für den Umkreisradius und die gesuchten Seitenlängen:

$$\begin{aligned} r &= \frac{s_c}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}} \\ a &= \frac{2\,s_c\sin\alpha}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}} \\ b &= \frac{2\,s_c\sin\beta}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}} \\ c &= \frac{2\,s_c\sin\gamma}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}} \end{aligned}$$

Walter Fendt, 26. März 2023