

Das abgestumpfte Ikosaeder

Walter Fendt

21. Juli 2025

Das **abgestumpfte Ikosaeder** (kurz der **Ikosaederstumpf**) ist einer der 13 **archimedischen Körper**. Wegen der Ähnlichkeit mit einem klassischen Fußball spricht man gelegentlich auch vom **Fußballkörper**. Selbst in der Natur kommen abgestumpfte Ikosaeder vor, nämlich in Form spezieller Kohlenstoff-Moleküle (C_{60}), deren Atome so angeordnet sind wie die Ecken des abgestumpften Ikosaeders.

1 Grundlagen

Das regelmäßige Fünfeck

Satz 1

Für ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge a gelten folgende Formeln:

Höhe

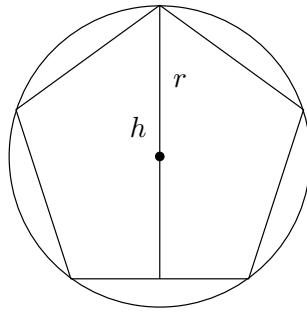
$$h = \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Umkreisradius

$$r = \frac{a}{10} \sqrt{10 (5 + \sqrt{5})}$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}$$



Regelmäßiges Fünfeck mit Höhe und Umkreis

Das regelmäßige Sechseck

Satz 2

Für ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge a gelten folgende Formeln:

Höhe

$$h = a\sqrt{3}$$

Umkreisradius

$$r = a$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

Das regelmäßige Ikosaeder

Satz 3

Für ein regelmäßiges Ikosaeder mit Kantenlänge a gilt die folgende Formel:

Kantenkugelradius

$$r_k = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5})$$

Die eulersche Polyederformel

Satz 4

Für die Anzahlen der Ecken (e), der Flächen (f) und der Kanten (k) eines beliebigen konvexen Polyeders gilt folgende Beziehung:

Eulersche Polyederformel

$$e + f = k + 2$$

Bemerkung: Der Begriff *Polyeder* (Vielflächner) bezeichnet einen Körper, der von Vielecken (Polygonen) begrenzt wird. *Konvex* bedeutet, dass eine beliebige Verbindungsstrecke von zwei Punkten des Polyeders stets vollständig innerhalb des Polyeders liegen muss. Alle Ecken müssen also nach außen gerichtet sein.

2 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 5

Ein *abgestumpftes Ikosaeder* ist ein konvexes Polyeder, bei dem in jeder Ecke ein regelmäßiges Fünfeck und zwei regelmäßige Sechsecke zusammentreffen.

Bemerkung: Das abgestumpfte Ikosaeder ist einer der 13 **archimedischen Körper**. Solche Körper werden von zwei oder drei Arten regelmäßiger Vielecke begrenzt – im Gegensatz zu den fünf **platonischen Körpern**, bei denen immer nur eine Art regelmäßiger Begrenzungsflächen vorkommt.



Satz 6

Ein abgestumpftes Ikosaeder hat 60 Ecken, 32 Flächen (12 regelmäßige Fünfecke und 20 regelmäßige Sechsecke) und 90 Kanten.

Beweis:

Jede Ecke des Körpers gehört zu genau einem Fünfeck. Ist f_5 die Zahl der Fünfecke, so gilt $f_5 \cdot 5 = e$ bzw. $f_5 = \frac{1}{5}e$.

Jede Ecke des Körpers gehört zu genau zwei Sechsecken. Ist f_6 die Zahl der Sechsecke, so folgt $f_6 \cdot 6 = 2e$. Der Faktor 2 bei e muss hier stehen, weil man sonst die Ecken doppelt zählen würde. Es folgt $f_6 = \frac{2}{3}e$.

Eine ähnliche Überlegung ist für die Zahl der Kanten (k) möglich. Weil in einer Ecke des Körpers drei Kanten zusammenkommen und eine Kante zwei Ecken hat, gilt $k = \frac{3}{2}e$.

Diese Zwischenergebnisse werden in die eulersche Polyederformel (Satz 4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} e + f_5 + f_6 &= k + 2 \\ e + \frac{1}{5}e + \frac{2}{3}e &= \frac{3}{2}e + 2 \end{aligned}$$

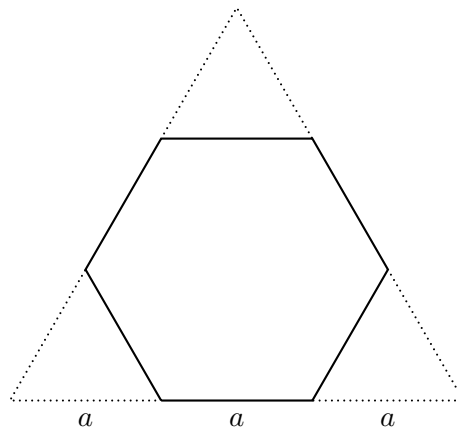
$$\begin{aligned}\frac{23}{15}e &= \frac{3}{2}e + 2 \\ \frac{1}{30}e &= 2 \\ e &= 60\end{aligned}$$

Aus der Zahl der Ecken erhält man sofort die weiteren Behauptungen:

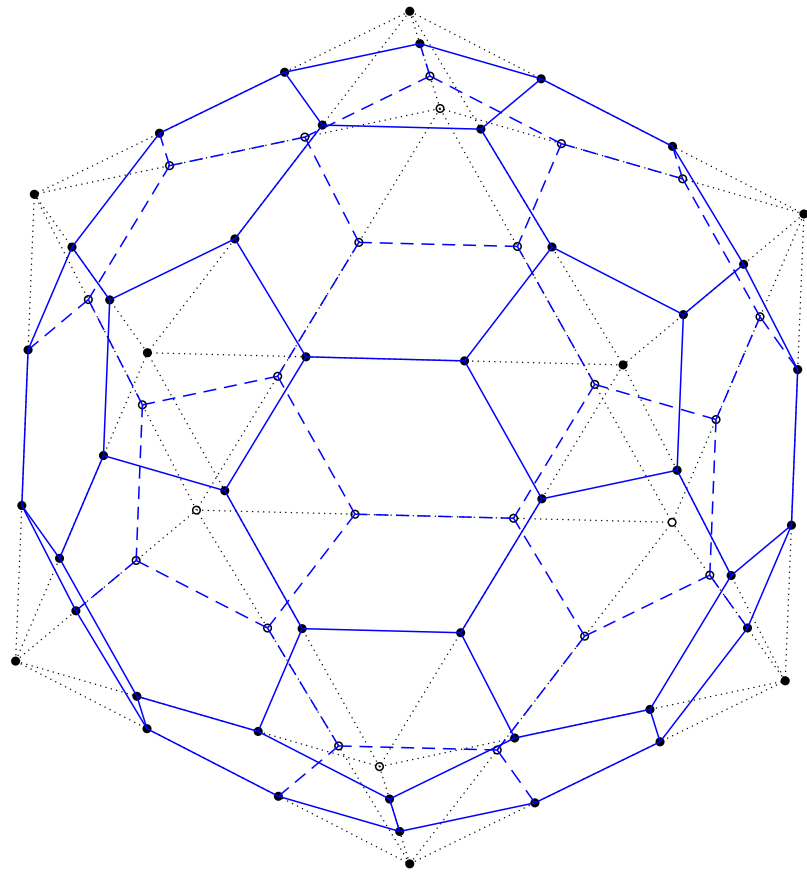
$$\begin{aligned}f_5 &= \frac{1}{5} \cdot 60 = 12 \\ f_6 &= \frac{1}{3} \cdot 60 = 20 \\ k &= \frac{3}{2} \cdot 60 = 90\end{aligned}$$

3 Erzeugung durch Abstumpfen

Wie aus dem Namen hervorgeht, erhält man den Körper durch Abstumpfen der Ecken eines Ikosaeders. Da in einer der zwölf Ikosaederecken je fünf Kanten zusammenkommen, werden Fünfeckspyramiden abgeschnitten; als Schnittflächen entstehen zwölf Fünfecke. Damit diese Fünfecke regelmäßig werden, muss die Schnittebene immer senkrecht zur Verbindungslinie Mittelpunkt-Ecke sein. Außerdem müssen die abgeschnittenen Fünfeckspyramiden kongruent sein. Aus den Dreiecken des Ikosaeders werden Sechsecke, die ebenfalls regelmäßig sein sollen. Dies ist nur möglich, wenn so abgeschnitten wird, dass von den ehemaligen Ikosaederkanten jeweils das mittlere Drittel übrigbleibt.



Die Zahl der Flächen (beim Ikosaeder 20) erhöht sich durch das Abstumpfen auf 32 (12 Fünfecke, 20 Sechsecke). Die Ecken der dazugekommenen Fünfecke sind die Ecken des abgestumpften Ikosaeders, der demnach $12 \cdot 5 = 60$ Ecken aufweist. Die Zahl der Kanten (90) erhält man problemlos aus der eulerschen Polyederformel (Satz 4).



Abstumpfung eines Ikosaeders
(Seitenkanten der abgeschnittenen Fünfeckspyramiden gepunktet)

4 Symmetrieeigenschaften

Satz 7

Ebenensymmetrie: Ein abgestumpftes Ikosaeder hat 15 Symmetrieebenen. Jede Symmetrieebene enthält zwei gegenüberliegende Kanten, die zwischen zwei Sechsecken liegen, sowie Symmetrieachsen von vier Fünfecken und vier Sechsecken. Auf einer Symmetrieebene liegen stets vier Ecken und acht Kantenmittelpunkte.

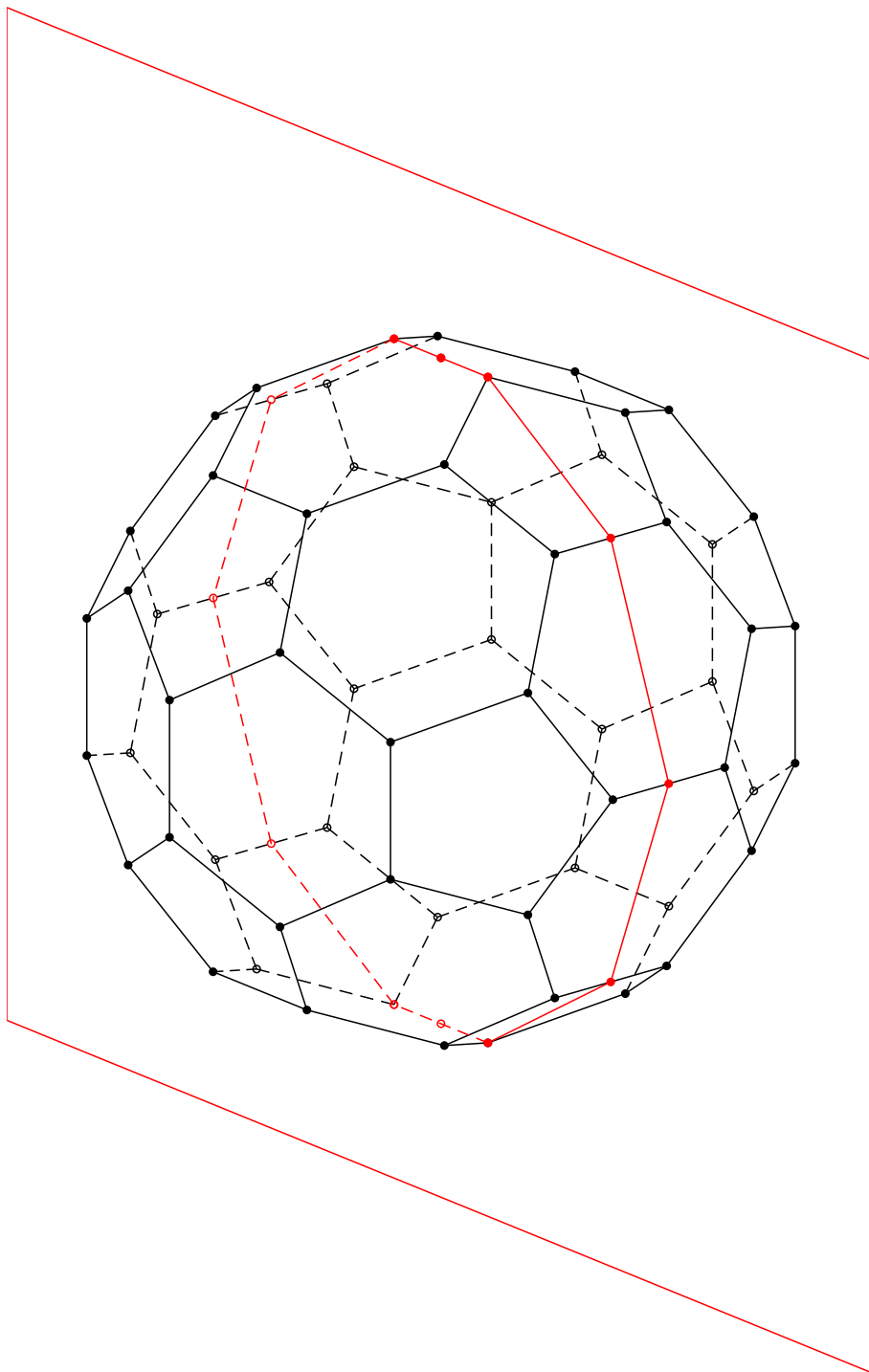
Drehsymmetrie: Ein abgestumpftes Ikosaeder besitzt

- 6 fünfzählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Fünfecken),
- 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Sechsecken) und
- 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten, die zwischen zwei Sechsecken liegen).

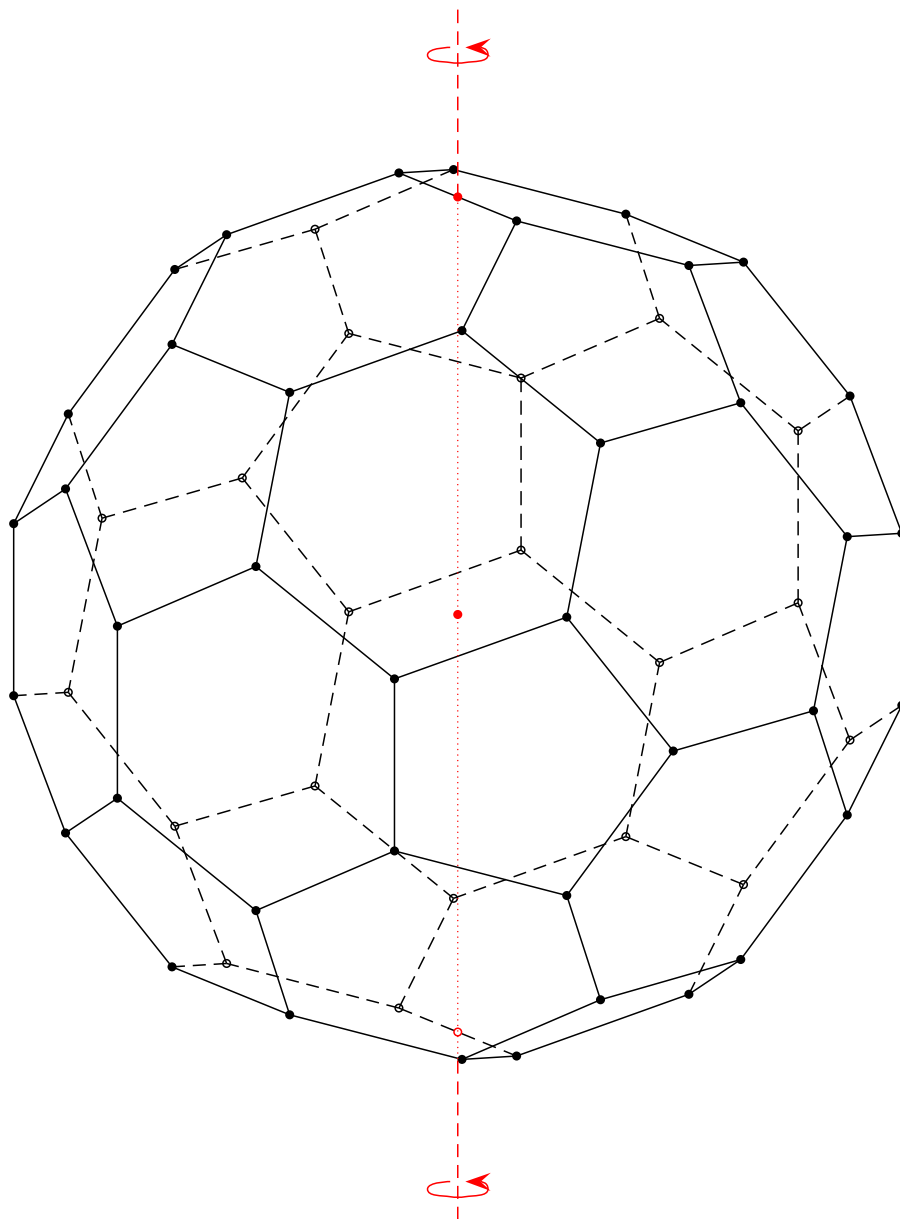
Punktsymmetrie: Ein abgestumpftes Ikosaeder ist punktsymmetrisch.

Bemerkung: Es gibt insgesamt 120 (gleichsinnige oder ungleichsinnige) Kongruenzabbildungen (Isometrien), die das abgestumpfte Ikosaeder auf sich abbilden. Sie bilden bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe. Diese Gruppe, die als **Ikosaedergruppe** (seltener als **Dodekaedergruppe**) bezeichnet wird, ist isomorph zum direkten Produkt $A_5 \times Z_2$ der alternierenden Gruppe A_5 und der zyklischen Gruppe Z_2 .

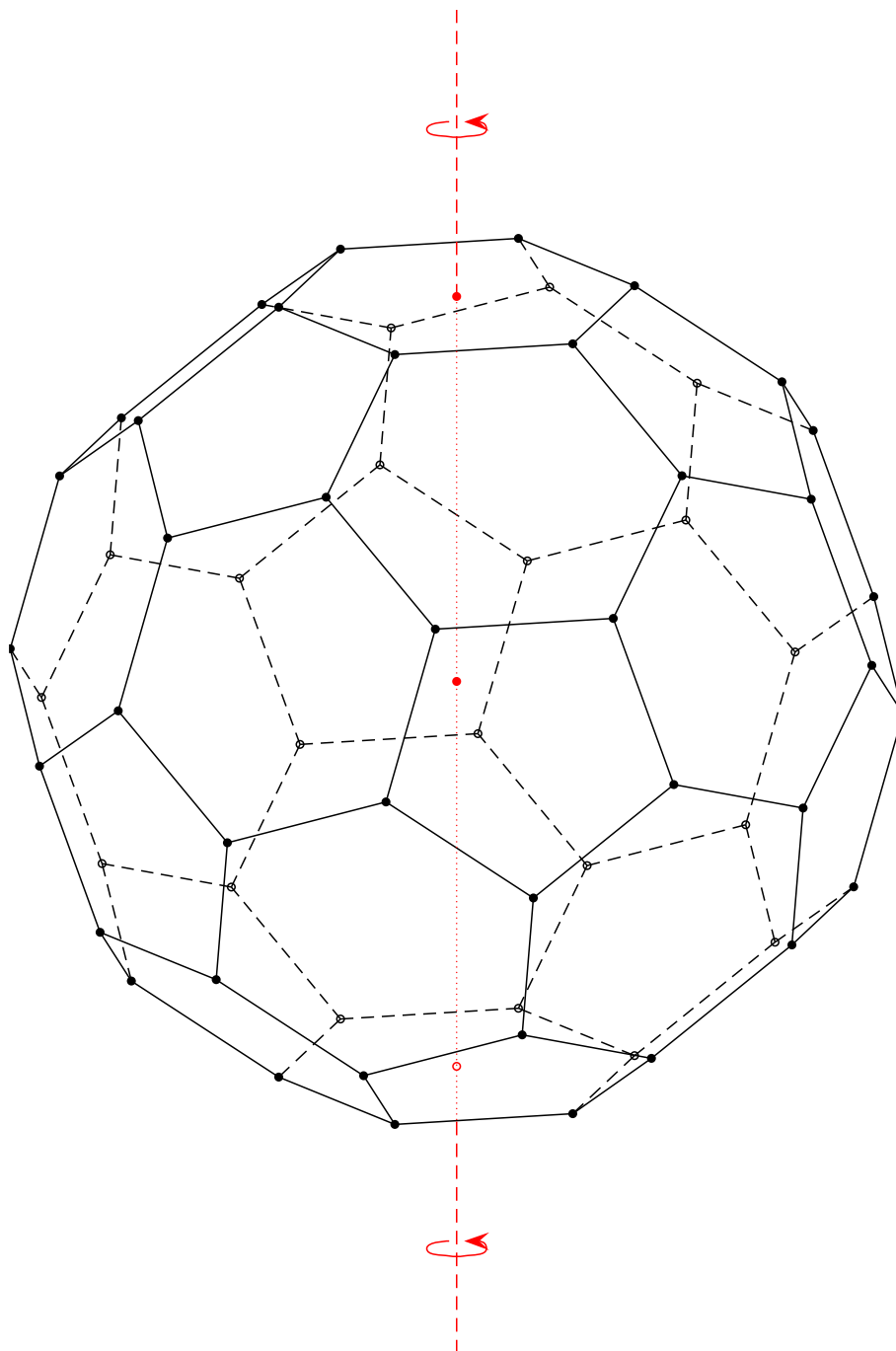
Beschränkt man sich auf die 60 gleichsinnigen unter den genannten 120 Kongruenzabbildungen, so erhält man eine Untergruppe, die zu A_5 isomorph ist. (Die Bezeichnungen sind allerdings nicht einheitlich; manchmal wird diese Untergruppe Ikosaedergruppe bzw. Dodekaedergruppe genannt.)



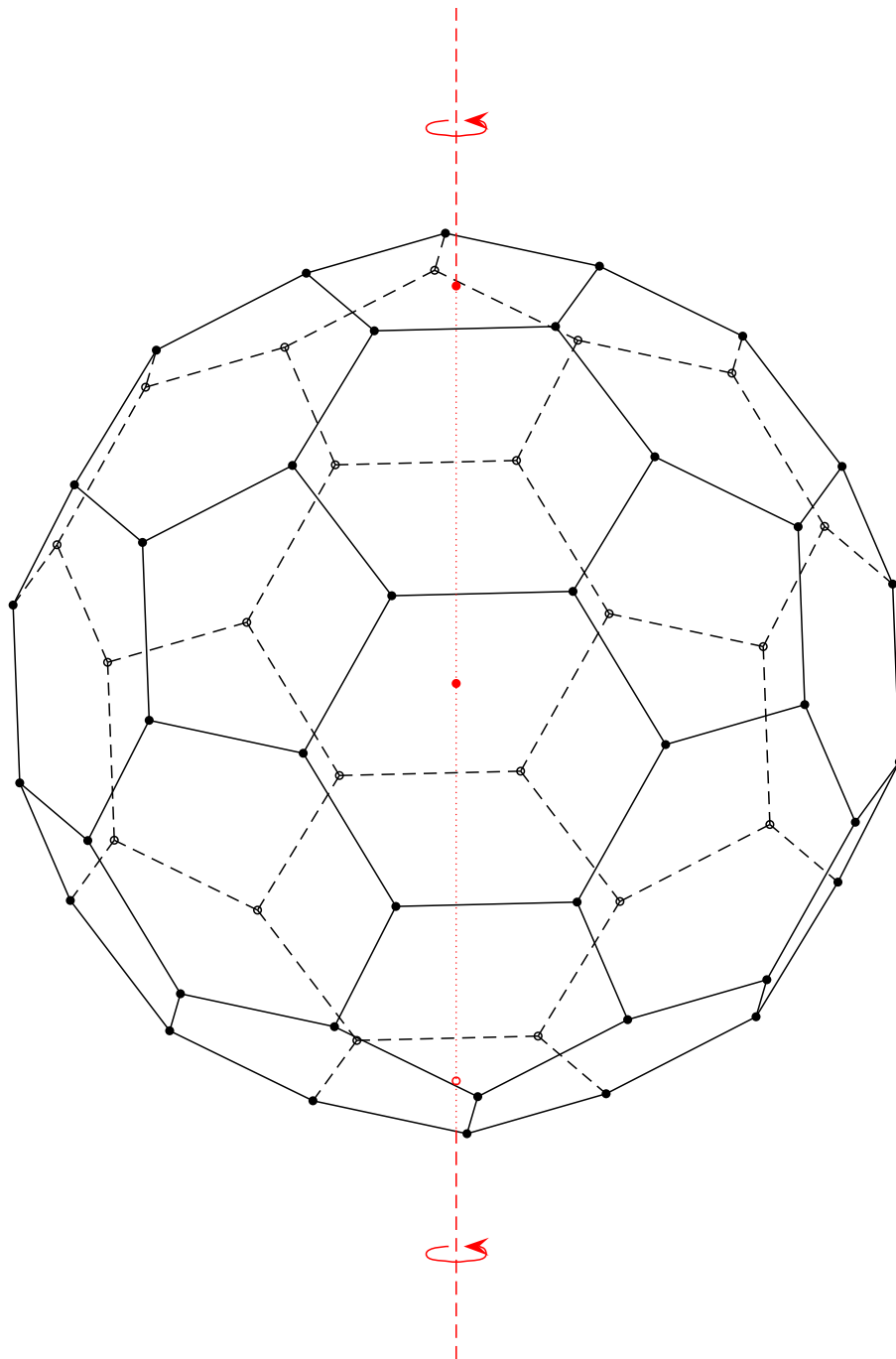
Abgestumpftes Ikosaeder mit Symmetrieebene



Abgestumpftes Ikosaeder mit zweizähliger Drehachse
 (durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Kanten,
 die jeweils zwischen zwei Secksecken liegen)



Abgestumpftes Ikosaeder mit dreizähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Sechsecken)



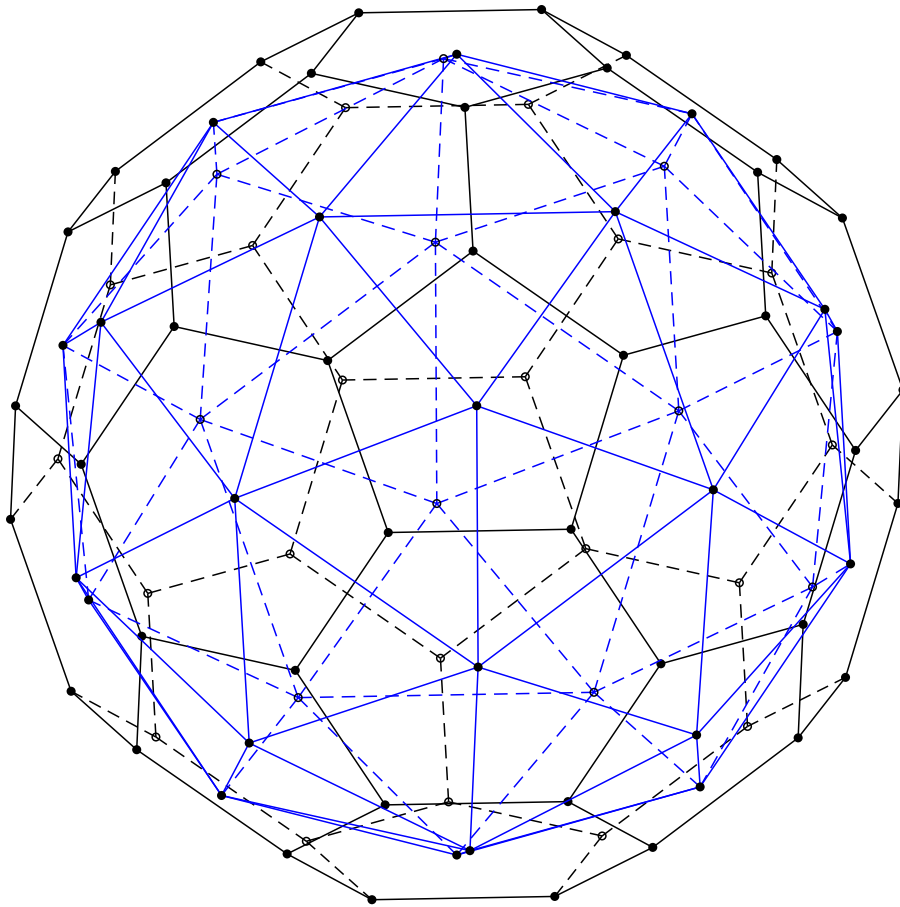
Abgestumpftes Ikosaeder mit fünfzähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Fünfecken)

5 Dualität

Satz 8

Verbindet man die Flächenmittelpunkte eines abgestumpften Ikosaeders, so entsteht dadurch ein Pentakis-dodekaeder. Dieses hat 32 Ecken, 90 Kanten und 60 kongruente gleichschenklige Dreiecke als Flächen.

Bemerkung: Als dualer Körper eines archimedischen Körpers gehört das Pentakis-dodekaeder zu den catalanischen Körpern.



6 Berechnungen

6.1 Kartesische Koordinaten

Durch die geraden Permutationen von

$$(0, \pm 1, \pm 3\Phi), \quad (\pm 2, \pm(1 + 2\Phi), \pm\Phi), \quad (\pm 1, \pm(2 + \Phi), \pm 2\Phi)$$

sind kartesische Koordinaten der Ecken eines abgestumpften Ikosaeders bestimmt. Dabei ist $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ das Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Bemerkung: Aus den angegebenen Koordinaten erhält man $r_u = \sqrt{9\Phi + 10}$ für den Umkugelradius und $a = 2$ für die Kantenlänge.

6.2 Radien

Kantenkugelradius

Satz 9

Für den Kantenkugelradius eines abgestumpften Ikosaeders gilt:

Kantenkugelradius

$$r_k = \frac{3}{4} a (1 + \sqrt{5})$$

Dabei ist a die Kantenlänge.

Beweis: Zwei gegenüberliegende Kanten des abgestumpften Ikosaeders sind die mittleren Drittel von zwei gegenüberliegenden Kanten des ursprünglichen Ikosaeders. Daher ändert sich beim Abstumpfen nichts am Abstand gegenüberliegender Kanten. Entsprechendes gilt für den halben Abstand, also den Kantenkugelradius. Man kann daher die Formel für den Kantenkugelradius des Ikosaeders (Satz 3) verwenden, allerdings mit der Kantenlänge $3a$. Auf diese Weise ergibt sich unmittelbar die behauptete Formel.

Umkugelradius

Satz 10

Für den Umkugelradius eines abgestumpften Ikosaeders mit der Kantenlänge a gilt:

Umkugelradius

$$r_u = \frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5}}$$

Beweis: Ein Kantenmittelpunkt, eine benachbarte Ecke und der Körpermittelpunkt bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck (rechter Winkel am Kantenmittelpunkt). Aus dem Satz des Pythagoras und Satz 9 folgt:

$$\begin{aligned} r_u^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r_k^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} a (1 + \sqrt{5})\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{9}{16} a^2 (1 + \sqrt{5})^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{9}{16} a^2 (6 + 2\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{16} (4 + 54 + 18\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{16} (58 + 18\sqrt{5}) \\ r_u &= \frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Inkugelradien

Eine Inkugel im normalen Sinn existiert nicht, da die Fünf- und Sechsecke nicht den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben. Der (einheitliche) Abstand der Fünfecksflächen vom Mittelpunkt wird hier mit r_5 bezeichnet, der Abstand der Sechsecksflächen vom Mittelpunkt mit r_6 .

Satz 11

Für die „Inkugelradien“ eines abgestumpften Ikosaeders mit der Kantenlänge a gilt:

Abstand einer Fläche vom Mittelpunkt

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{a}{20} \sqrt{1250 + 410\sqrt{5}} \\ r_6 &= \frac{a}{4} \sqrt{3} (3 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Beweis: Durch den Mittelpunkt des Körpers, den Mittelpunkt einer Fläche und eine der zur Fläche gehörigen Ecken ist ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt. Der rechte Winkel befindet sich beim Flächenmittelpunkt. Die Hypotenuse hat die Länge r_u (Umkugelradius), die Katheten entsprechen dem Abstand Flächenmittelpunkt-Körpermittelpunkt (r_5 bzw. r_6) und dem Umkreisradius der betrachteten Fläche (ρ_5 bzw. ρ_6).

Für eine Fünfecksfläche ergibt sich nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} r_5^2 + \rho_5^2 &= r_u^2 \\ r_5^2 &= r_u^2 - \rho_5^2 \end{aligned}$$

Hier setzt man die Ergebnisse von Satz 10 und 1 ein:

$$\begin{aligned} r_5^2 &= \left(\frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \right)^2 - \left(\frac{a}{10} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{16} (58 + 18\sqrt{5}) - \frac{a^2}{100} (50 + 10\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{400} (1450 + 450\sqrt{5} - 200 - 40\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{400} (1250 + 410\sqrt{5}) \\ r_5 &= \frac{a}{20} \sqrt{1250 + 410\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Die entsprechende (am Ende etwas trickreiche) Rechnung für eine Sechsecksfläche lautet wegen $\rho_6 = a$:

$$\begin{aligned} r_6^2 &= r_u^2 - \rho_6^2 \\ &= \left(\frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \right)^2 - a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{16} (58 + 18\sqrt{5}) - a^2 \\
&= \frac{a^2}{16} (58 + 18\sqrt{5} - 16) \\
&= \frac{a^2}{16} (42 + 18\sqrt{5}) \\
&= \frac{a^2}{16} \cdot 3 (14 + 6\sqrt{5}) \\
&= \frac{a^2}{16} \cdot 3 (3 + \sqrt{5})^2 \\
r_6 &= \frac{a}{4} \sqrt{3} (3 + \sqrt{5})
\end{aligned}$$

6.3 Oberfläche und Volumen

Oberflächeninhalt

Satz 12

Für den Oberflächeninhalt eines abgestumpften Ikosaeders gilt:

<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;">Oberflächeninhalt</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;"> $S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$ </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;">Oberflächeninhalt</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;"> $S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$ </td> </tr> </table>	Oberflächeninhalt	$S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;">Oberflächeninhalt</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;"> $S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$ </td> </tr> </table>	Oberflächeninhalt	$S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$	
Oberflächeninhalt			
$S = 3 a^2 \left(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \right)$			

a bezeichnet wie üblich die Kantenlänge.

Beweis: Da ein regelmäßiges Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist, ergibt sich für dessen Flächeninhalt

$$A_6 = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge a ist, wie in Satz 1 angegeben,

$$A_5 = \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}.$$

Die gesamte Oberfläche umfasst 20 Sechsecke und 12 Fünfecke. Daraus erhält man:

$$S = 20 \cdot \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} + 12 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

$$\begin{aligned}
&= 30a^2\sqrt{3} + 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \\
&= 3a^2\left(10\sqrt{3} + \sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}$$

Volumen

Satz 13

Für das Volumen eines abgestumpften Ikosaeders mit Kantenlänge a gilt:

Volumen $V = \frac{a^3}{4} (125 + 43\sqrt{5})$
--

Beweis: Das abgestumpfte Ikosaeder lässt sich zusammensetzen aus regelmäßigen Pyramiden, deren Spitzen mit dem Mittelpunkt des abgestumpften Ikosaeders übereinstimmen. Als Grundflächen werden die fünf- oder sechseckigen Flächen des Körpers betrachtet. Die zugehörigen Höhen, also die Abstände der Flächen vom Mittelpunkt, wurden in Satz 11 angegeben.

Das Volumen einer regelmäßigen Fünfeckspyramide berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
V_5 &= \frac{1}{3} A_5 r_5 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{10}} \\
&= \frac{a^3}{24} \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \cdot \frac{125+41\sqrt{5}}{10} \\
&= \frac{a^3}{24} \sqrt{\frac{1}{2} (625 + 205\sqrt{5} + 250\sqrt{5} + 410)} \\
&= \frac{a^3}{24} \sqrt{\frac{1}{2} (1035 + 455\sqrt{5})}
\end{aligned}$$

Die Weiterrechnung erfordert wieder einen kleinen Trick:

$$\begin{aligned}
V_5 &= \frac{a^3}{48} \sqrt{2070 + 910\sqrt{5}} \\
&= \frac{a^3}{48} \sqrt{35^2 + 13^2 \cdot 5 + 2 \cdot 35 \cdot 13\sqrt{5}} \\
&= \frac{a^3}{48} \sqrt{(35 + 13\sqrt{5})^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^3}{48} (35 + 13\sqrt{5})$$

Das Volumen einer regelmäßigen Sechseckpyramide ist:

$$\begin{aligned} V_6 &= \frac{1}{3} A_6 r_6 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{a}{4} \sqrt{3} (3 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{3a^3}{8} (3 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Als Gesamtvolumen des abgestumpften Ikosaeders erhält man demnach:

$$\begin{aligned} V &= 12 \cdot \frac{a^3}{48} (35 + 13\sqrt{5}) + 20 \cdot \frac{3a^3}{8} (3 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{a^3}{4} (35 + 13\sqrt{5} + 30(3 + \sqrt{5})) \\ &= \frac{a^3}{4} (125 + 43\sqrt{5}) \end{aligned}$$

6.4 Winkel

Winkel zwischen zwei Sechsecken

Satz 14

Für den Winkel zwischen zwei benachbarten Sechsecken eines abgestumpften Ikosaeders gilt:

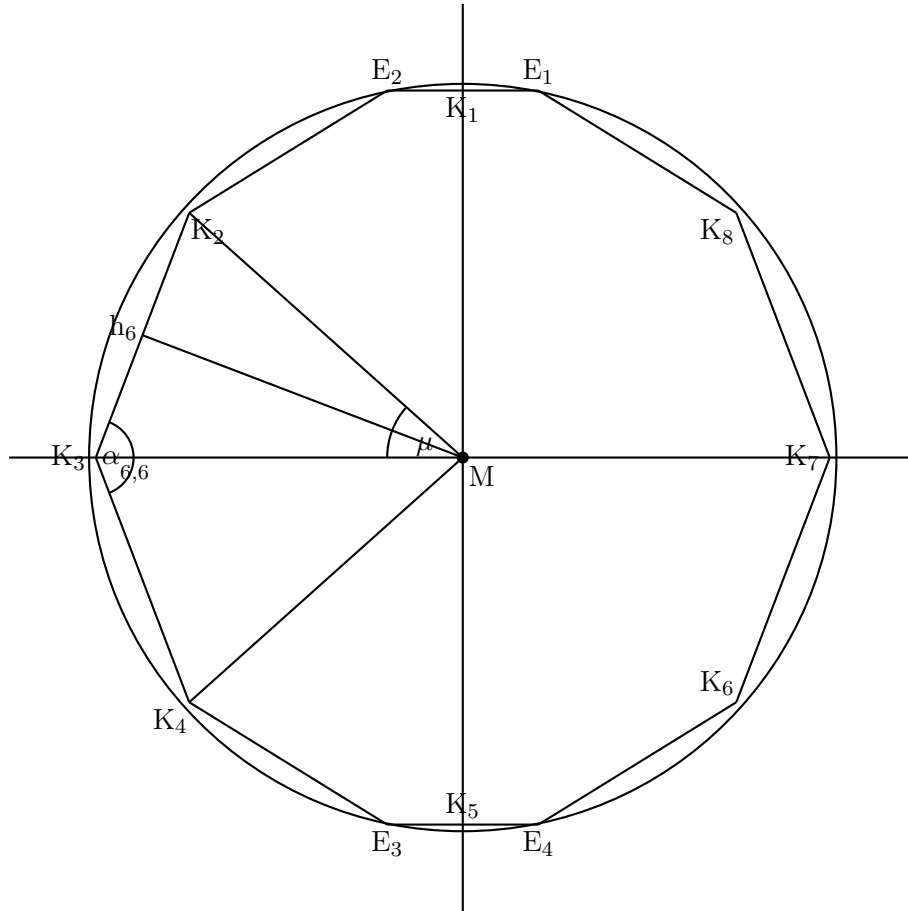
Winkel zwischen zwei Sechsecken

$$\tan \frac{\alpha_{6,6}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Bemerkung: Aus der Formel ergibt sich die Näherung $\alpha \approx 138,18969^\circ$.

Beweis:

Die Schnittebene der folgenden Zeichnung ist so gewählt, dass sie (oben und unten) zwei gegenüberliegende Kanten enthält, die jeweils zwischen zwei Sechsecksflächen liegen. Die Ecken in dieser Ebene sind mit E_1 bis E_4 bezeichnet, die Kantenmittelpunkte mit K_1 bis K_8 . Die Ecken haben vom Mittelpunkt die Entfernung r_u (Umkugelradius, siehe Satz 10), die Kantenmittelpunkte die Entfernung r_k (siehe Satz 9). h_6 ist die Höhe eines regelmäßigen Sechsecks (das heißt der Abstand gegenüberliegender Seiten).



Der Mittelpunktswinkel μ lässt sich dadurch bestimmen, dass man das gleichschenklige Dreieck K_2K_3M in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Nach dem Schema „Gegenkathete durch Hypotenuse“ erhält man unter Verwendung von $h_6 = a\sqrt{3}$ und Satz 9:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\mu}{2} &= \frac{\frac{1}{2}h_6}{r_k} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a(1+\sqrt{5})} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{5})} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3(5-1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}$$

Für die weiteren Umformungen soll auch $\tan \frac{\mu}{2}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\mu}{2} &= \frac{3(\sqrt{5}-1)^2}{36} \\ &= \frac{6-2\sqrt{5}}{12} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{6} \\ \cos^2 \frac{\mu}{2} &= 1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} \\ &= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{6} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{6} \\ \tan^2 \frac{\mu}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}}{\cos^2 \frac{\mu}{2}} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})^2}{4} \\ \tan \frac{\mu}{2} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\alpha_{6,6}}{2} = 90^\circ - \frac{\mu}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha_{6,6}}{2} &= \frac{1}{\tan \frac{\mu}{2}} \\ &= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \\ &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Bemerkung: Die sechseckigen Flächen des abgestumpften Ikosaeders sind Teile der Dreiecksflächen des ursprünglichen Ikosaeders. Der gesuchte Winkel ist daher genau so groß wie der Winkel zwischen zwei benachbarten Dreiecksflächen eines Ikosaeders.

Winkel zwischen Fünfeck und Sechseck

Satz 15

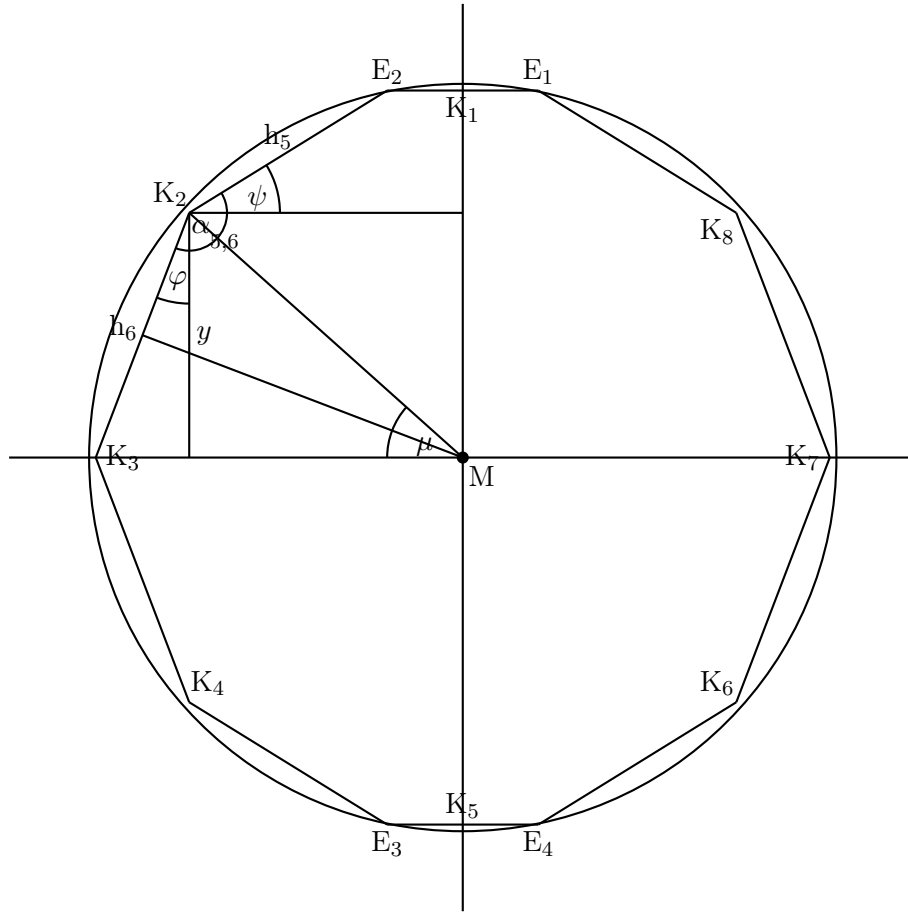
Für den Winkel zwischen einem Fünfeck und einem angrenzenden Sechseck eines abgestumpften Ikosaeders gilt:

Winkel zwischen Fünfeck und Sechseck

$$\tan \alpha_{5,6} = \sqrt{5} - 3$$

Bemerkung: Aus der Formel erhält man $\alpha_{5,6} \approx 142,62263^\circ$

Beweis: Es wird im Wesentlichen die gleiche Zeichnung verwendet wie beim Winkel zwischen zwei Sechsecken. Zusätzlich sind zwei Lote und zwei Teilwinkel φ und ψ eingezeichnet.



Für das Lot auf die waagrechte Linie gilt:

$$\begin{aligned} y &= h_6 \cos \varphi \\ &= h_6 \cos \frac{\mu}{2} \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 14 folgt:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\mu}{2} &= \frac{\sin \frac{\mu}{2}}{\tan \frac{\mu}{2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3(3-\sqrt{5})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{3(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \\
&= \frac{\sqrt{3}(3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5})}{3(9-5)} \\
&= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{5}+2)}{12} \\
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}
\end{aligned}$$

Für y ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned}
y &= h_6 \cos \frac{\mu}{2} \\
&= a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6} \\
&= \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)
\end{aligned}$$

Aus der Zeichnung erkennt man $\varphi = \frac{\mu}{2}$. Für den oberen Teilwinkel ψ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin \psi &= \frac{r_k - y}{h_5} \\
&= \frac{\frac{3}{4}a(1+\sqrt{5}) - \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)}{\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\
&= \frac{\frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)}{\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\
&= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\
\sin^2 \psi &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4(5+2\sqrt{5})} \\
&= \frac{6+2\sqrt{5}}{4(5+2\sqrt{5})} \\
&= \frac{(6+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{4(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} \\
&= \frac{30-12\sqrt{5}+10\sqrt{5}-20}{4(25-20)} \\
&= \frac{10-2\sqrt{5}}{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \\
\cos^2 \psi &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad (\text{trigonometrischer Pythagoras}) \\
\tan^2 \psi &= \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \\
&= \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{5 - 1} \\
&= \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4} \\
\tan \psi &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Winkel $\alpha_{5,6}$ lässt sich als Summe ausdrücken. Daher kommt das Additionstheorem der Tangensfunktion zum Einsatz.

$$\alpha_{5,6} = \varphi + \psi + 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
\tan(\varphi + \psi) &= \frac{\tan \varphi + \tan \psi}{1 - \tan \varphi \cdot \tan \psi} \\
&= \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} \\
&= \frac{4}{4 - (3\sqrt{5} - 3 - 5 + \sqrt{5})} \\
&= \frac{4}{4 - (4\sqrt{5} - 8)} \\
&= \frac{1}{3 - \sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan \alpha_{5,6} &= \tan(90^\circ + (\varphi + \psi)) \\
&= -\frac{1}{\tan(\varphi + \psi)} \\
&= -(3 - \sqrt{5}) \\
&= \sqrt{5} - 3
\end{aligned}$$

Winkel zwischen Fünfeck und Kante

Satz 16

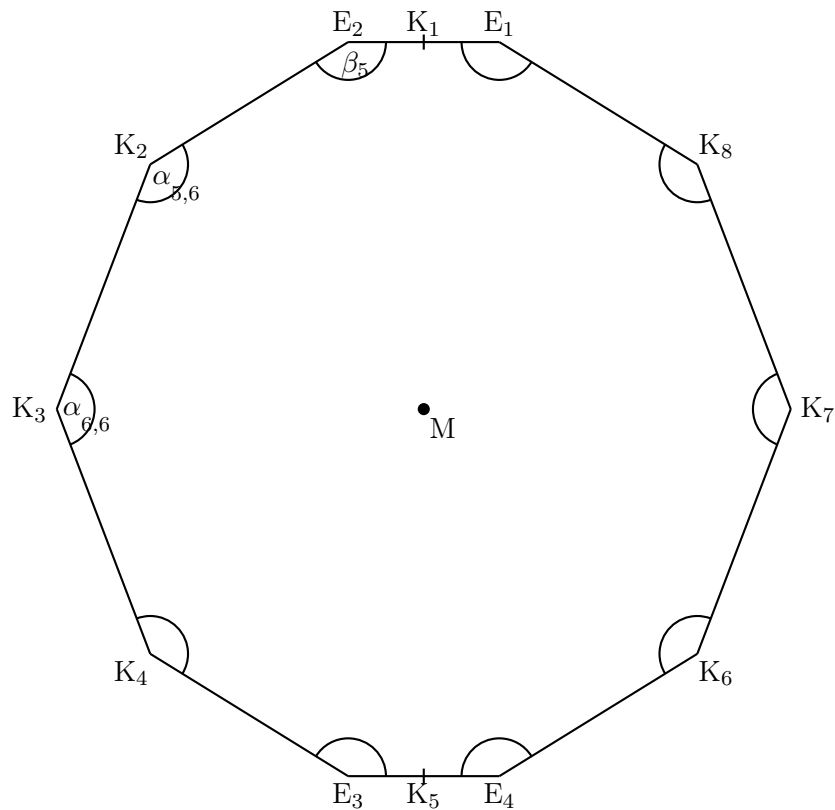
Für den Winkel zwischen einem Fünfeck und einer Kante eines abgestumpften Ikosaeders gilt:

Winkel zwischen Fünfeck und Kante

$$\tan \beta_5 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Bemerkung: Als Näherungswert erhält man: $\beta_5 \approx 148,28252^\circ$

Beweis:



Aus der Winkelsumme und der Symmetrie des Zehnecks ergibt sich

$$4\beta_5 + 4\alpha_{5,6} + 2\alpha_{6,6} = 1440^\circ.$$

β_5 lässt sich also durch $\alpha_{5,6}$ und $\alpha_{6,6}$ ausdrücken:

$$\beta_5 = 360^\circ - \alpha_{5,6} - \frac{1}{2}\alpha_{6,6}$$

Aus dem Additionstheorem des Tangens und den früheren Ergebnissen $\tan \alpha_{5,6} = \sqrt{5} - 3$

sowie $\tan(\frac{1}{2}\alpha_{6,6}) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ folgt:

$$\tan\left(\alpha_{5,6} + \frac{1}{2}\alpha_{6,6}\right) = \frac{\tan \alpha_{5,6} + \tan(\frac{1}{2}\alpha_{6,6})}{1 - \tan \alpha_{5,6} \cdot \tan(\frac{1}{2}\alpha_{6,6})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{5}-3) + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{1 - (\sqrt{5}-3) \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-3) + (3+\sqrt{5})}{2 - (\sqrt{5}-3)(3+\sqrt{5})} \\
&= \frac{3\sqrt{5}-3}{2-(5-9)} \\
&= \frac{3\sqrt{5}-3}{6} \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2}
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
\tan \beta_5 &= \tan \left(360^\circ - \left(\alpha_{5,6} + \frac{1}{2} \alpha_{6,6} \right) \right) \\
&= -\tan \left(\alpha_{5,6} + \frac{1}{2} \alpha_{6,6} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Literatur

- [1] Friedrich Barth, Gert Krumbacher, Elisabeth Matschiner, Konrad Ossiander:
Anschauliche Geometrie 3.
Ehrenwirth Verlag, München, 1988.
- [2] Pierre Basieux: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze.
Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg, 2000.
- [3] Walter Fendt: Das Ikosaeder.
www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf
- [4] Walter Fendt: Die platonischen Körper (HTML5-App).
www.walter-fendt.de/html5/mde/platonicsolids_de.htm
- [5] Walter Fendt: Die archimedischen Körper (HTML5-App).
www.walter-fendt.de/html5/mde/archimediansolids_de.htm
- [6] Udo Hebisch: Mathematisches Café; Ikosaeder.
www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/ikosa.html (nicht mehr abrufbar)
- [7] Jürgen Köller: Mathematische Basteleien; Abgestumpftes Ikosaeder.
www.mathematische-basteleien.de/fussball.htm
- [8] Eric W. Weisstein: Math World, Icosahedral Group.
mathworld.wolfram.com/IcosahedralGroup.html
- [9] Wikipedia-Artikel zum Ikosaederstumpf.
de.wikipedia.org/wiki/Ikosaederstumpf

Letzte Änderung: 21. Juli 2025