App zum Thema Kegelschnitte

Walter Fendt

16. April 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**
- 1.1 Koordinatensystem . . . 3
- 1.2 Gegebene Größen . . . 3
- 1.3 Fallunterscheidung . . . 3
- 1.4 Trigonometrische Formeln . . . 3

2 Ellipse **6**
- 2.1 Punkte . . . 7
- 2.2 Entfernungen . . . 7
- 2.3 Große Halbachse . . . 8
- 2.4 Dandelin-Kugeln . . . 8
  - 2.4.1 Mittelpunkt der 1. Dandelin-Kugel . . . 8
  - 2.4.2 Radius der 1. Dandelin-Kugel . . . 9
  - 2.4.3 Mittelpunkt der 2. Dandelin-Kugel . . . 9
  - 2.4.4 Radius der 2. Dandelin-Kugel . . . 10
- 2.5 Lineare Exzentrizität . . . 10
- 2.6 Numerische Exzentrizität . . . 11
- 2.7 Kleine Halbachse . . . 11
- 2.8 Halbparameter . . . 11
- 2.9 Abstand zwischen Mittelpunkt und Direktrix . . . 11
- 2.10 Koordinaten . . . 12
  - 2.10.1 Koordinaten des 1. Hauptscheitels . . . 12
  - 2.10.2 Koordinaten des 2. Hauptscheitels . . . 12
  - 2.10.3 Koordinaten des Ellipsenmittelpunkts . . . 12
  - 2.10.4 Koordinaten des 1. Brennpunkts . . . 12
  - 2.10.5 Koordinaten des 2. Brennpunkts . . . 13

3 Parabel **15**
- 3.1 Entfernungen . . . 15
- 3.2 Dandelin-Kugel . . . 15
- 3.3 Halbparameter . . . 16

3.4 Koordinaten 16
3.4.1 Koordinaten des Scheitels 16
3.4.2 Koordinaten des Brennpunkts 16

4 Hyperbel **18**
4.1 Entfernungen 18
4.2 Reelle Halbachse 19
4.3 Dandelin-Kugeln 20
4.3.1 Mittelpunkt der 1. Dandelin-Kugel 20
4.3.2 Radius der 1. Dandelin-Kugel 20
4.3.3 Mittelpunkt der 2. Dandelin-Kugel 21
4.3.4 Radius der 2. Dandelin-Kugel 21
4.4 Lineare Exzentrizität 22
4.5 Numerische Exzentrizität 22
4.6 Imaginäre Halbachse 22
4.7 Halbparameter 22
4.8 Abstand zwischen Mittelpunkt und Direktrix 23
4.9 Koordinaten 23
4.9.1 Koordinaten des 1. Hauptscheitels 23
4.9.2 Koordinaten des 2. Hauptscheitels 24
4.9.3 Koordinaten des Hyperbelmittelpunkts 24
4.9.4 Koordinaten des 1. Brennpunkts 25
4.9.5 Koordinaten des 2. Brennpunkts 25

1 Grundlagen

Ein (Doppel-)Kegel wird von einer Ebene geschnitten.

1.1 Koordinatensystem

Kegelspitze als Ursprung, Kegelachse als z-Achse, y-Achse parallel zur Ebene

1.2 Gegebene Größen

α	Öffnungswinkel (zwischen Mantellinie und Kegelachse)
β	Winkel zwischen Ebene und Kegelachse
s	z-Koordinate des Schnittpunkts (S) von Ebene und Kegelachse

1.3 Fallunterscheidung

$s \neq 0$	$\beta > \alpha$	Ellipse
$s \neq 0$	$\beta = \alpha$	Parabel
$s \neq 0$	$\beta < \alpha$	Hyperbel
$s = 0$	$\beta > \alpha$	Punkt
$s = 0$	$\beta = \alpha$	Gerade
$s = 0$	$\beta < \alpha$	Geradenpaar

1.4 Trigonometrische Formeln

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\ &= 2\sin\alpha\cos\beta \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$

Durch Einsetzen von (1) und (2) erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} &= \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-\sin^2\beta} \\
&= \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\
&= 2\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}
$$

Durch Einsetzen von (1) und (4) erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}-\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} &= \frac{-2\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta} \\
&= \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta} \\
&= \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)} \\
&= \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha} \\
&= \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} &= \frac{1}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}+\frac{1}{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} \\
&= \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}+\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta} \\
&= \frac{Z}{N},
\end{aligned}
$$

wobei der Zähler Z und der Nenner N durch die folgenden Terme gegeben sind:

$$
\begin{aligned}
Z &= (1-\tan\alpha\tan\beta)(\tan\alpha-\tan\beta)+(1+\tan\alpha\tan\beta)(\tan\alpha+\tan\beta) \\
&= \tan\alpha-\tan\beta-\tan^2\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan^2\beta \\
&\quad +\ \tan\alpha+\tan\beta+\tan^2\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan^2\beta \\
&= 2\tan\alpha+2\tan\alpha\tan^2\beta \\
&= 2\tan\alpha(1+\tan^2\beta) \\
&= \frac{2\tan\alpha}{\cos^2\beta}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} N &= (\tan\alpha + \tan\beta)(\tan\alpha - \tan\beta) \\ &= \tan^2\alpha - \tan^2\beta \end{aligned}$$

Setzt man die Ausdrücke für Z und N oben ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} &= \frac{\frac{2\tan\alpha}{\cos^2\beta}}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{\cos^2\beta(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)} \end{aligned}$$

Nun wird auf der rechten Seite mit $\cos^2\alpha$ erweitert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} &= \frac{2\tan\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta} \qquad (6) \end{aligned}$$

Entsprechend lässt sich beweisen:

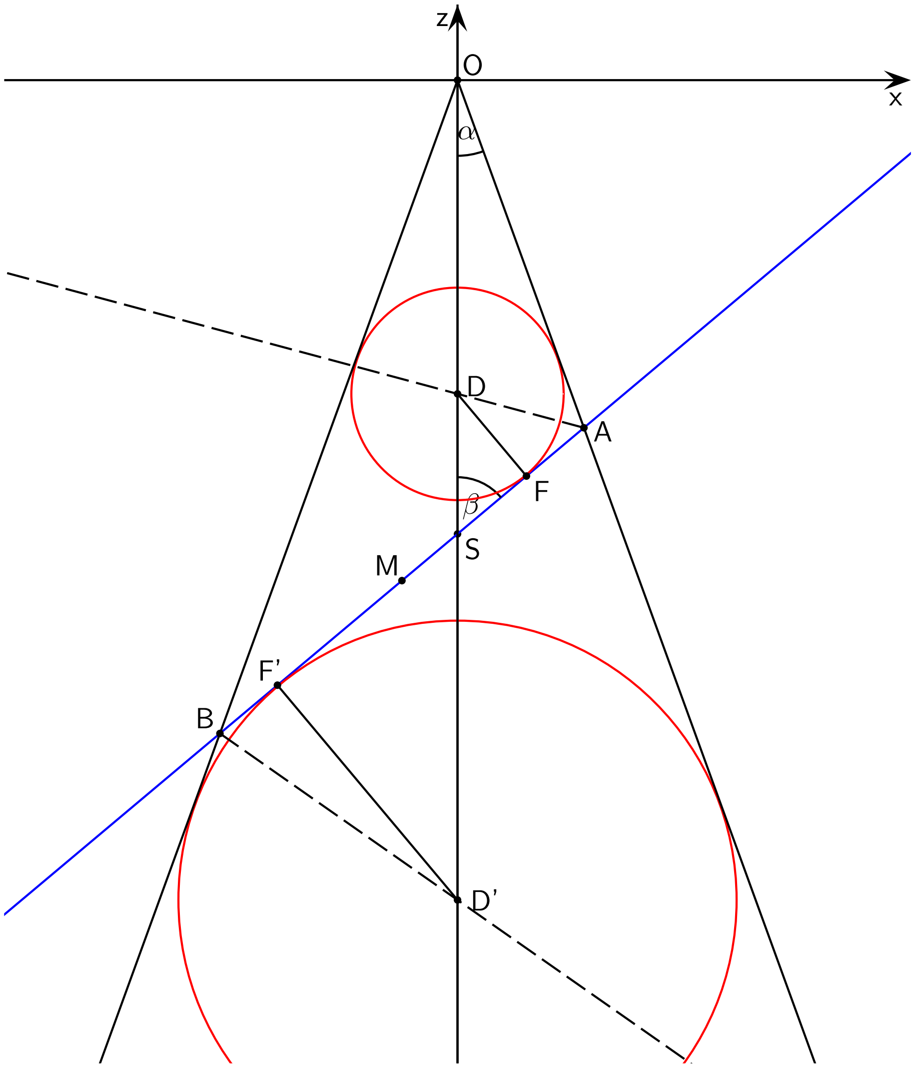
$$\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} - \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta} \qquad (7)$$

Maxima-Berechnungen:

$$\frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta} = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta} \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{2\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta} \qquad (9)$$

2 Ellipse



Dandelin-Kugeln einer Ellipse

2.1 Punkte

O	Kegelspitze, Ursprung
S	Schnittpunkt zwischen Ebene und Kegelachse
A	1. Hauptscheitel der Ellipse (näher an der Kegelspitze)
B	2. Hauptscheitel der Ellipse (weiter weg von der Kegelspitze)
M	Mittelpunkt der Ellipse
D	Mittelpunkt der 1. Dandelin-Kugel (näher an der Kegelspitze)
D'	Mittelpunkt der 2. Dandelin-Kugel (weiter entfernt von der Kegelspitze)
F	1. Brennpunkt der Ellipse (näher beim 1. Hauptscheitel)
F'	2. Brennpunkt der Ellipse (näher beim 2. Hauptscheitel)

2.2 Entfernungen

Dreieck OSA: Gegeben $\overline{OS} = |s|$, Winkel α (bei O), Winkel β (bei S); Sinussatz

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OA}}{\sin\beta} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{|s|}{\sin(\alpha+\beta)} \\ \overline{OA} &= \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AS}}{\sin\alpha} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{|s|}{\sin(\alpha+\beta)} \\ \overline{AS} &= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (11)\end{aligned}$$

Dreieck OBS: Gegeben $\overline{OS} = |s|$, Winkel α (bei O), Winkel $180^\circ - \beta$ (bei S); Sinussatz

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OB}}{\sin(180^\circ - \beta)} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta))} = \frac{|s|}{\sin(\beta-\alpha)} \\ \overline{OB} &= \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BS}}{\sin\alpha} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{|s|}{\sin(\beta-\alpha)} \\ \overline{BS} &= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (13)\end{aligned}$$

2.3 Große Halbachse

Große Achse:

$$\begin{aligned} 2a = \overline{AB} &= \overline{AS} + \overline{BS} \\ &= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \end{aligned}$$

Große Halbachse:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= \frac{1}{2}|s|\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}\right) \end{aligned}$$

Durch Anwendung von (3) ergibt sich daraus weiter:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}|s|\sin\alpha\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha} \\ &= |s|\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha} \qquad (14) \end{aligned}$$

2.4 Dandelin-Kugeln

Die beiden Dandelin-Kugeln sind die Kugeln mit Mittelpunkt auf der Kegelachse, die zugleich den Kegel und die Ebene berühren. Die Dandelin-Kugel, die näher an der Kegelspitze liegt, wird hier als 1. Dandelin-Kugel bezeichnet.

2.4.1 Mittelpunkt der 1. Dandelin-Kugel

In der Schnittzeichnung ist D der Inkreismittelpunkt des Dreiecks OBA und somit Schnittpunkt der Winkelhalbierenden dieses Dreiecks. D liegt folglich auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OAS$. Ein Satz der Dreiecksgeometrie besagt, dass eine Winkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser Satz nun wird auf Dreieck OSA angewendet.

$$\begin{aligned} \overline{OD} : \overline{DS} &= \overline{OA} : \overline{AS} \\ \overline{OD} : (\overline{OS} - \overline{OD}) &= \overline{OA} : \overline{AS} \\ \overline{OD} \cdot \overline{AS} &= (\overline{OS} - \overline{OD}) \cdot \overline{OA} \\ \overline{OD} \cdot \overline{AS} &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} - \overline{OD} \cdot \overline{OA} \\ \overline{OD} \cdot \overline{AS} + \overline{OD} \cdot \overline{OA} &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{OD} \cdot (\overline{AS} + \overline{OA}) &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} \\
\overline{OD} &= \frac{\overline{OS} \cdot \overline{OA}}{\overline{AS} + \overline{OA}}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Einsetzen von $\overline{OS} = |s|$ und (10):

$$
\begin{aligned}
\overline{OD} &= \frac{|s| \cdot \frac{|s| \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}{\frac{|s| \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|s| \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}} \\
&= \frac{|s| \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned} \tag{16}
$$

2.4.2 Radius der 1. Dandelin-Kugel

$$
\begin{aligned}
\overline{DS} &= \overline{OS} - \overline{OD} \\
&= |s| - \frac{|s| \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= |s| \left(1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right) \\
&= |s| \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r = \overline{DF} &= \overline{DS} \sin\beta \\
&= |s| \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned} \tag{17}
$$

2.4.3 Mittelpunkt der 2. Dandelin-Kugel

In der Schnittzeichnung ist D' ein Ankreismittelpunkt des Dreiecks OBA und somit Schnittpunkt von einer Innenwinkelhalbierenden und zwei Außenwinkelhalbierenden dieses Dreiecks. D' liegt folglich auf der Halbierungslinie des Außenwinkels von $\sphericalangle ABO = \sphericalangle SBO$. Ein Satz der Dreiecksgeometrie besagt, dass eine Außenwinkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite (außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser Satz nun wird auf Dreieck OBS angewendet.

$$
\begin{aligned}
\overline{OD'} : \overline{D'S} &= \overline{OB} : \overline{BS} \\
\overline{OD'} : (\overline{OD'} - \overline{OS}) &= \overline{OB} : \overline{BS} \\
\overline{OD'} \cdot \overline{BS} &= (\overline{OD'} - \overline{OS}) \cdot \overline{OB} \\
\overline{OD'} \cdot \overline{BS} &= \overline{OD'} \cdot \overline{OB} - \overline{OS} \cdot \overline{OB} \\
\overline{OS} \cdot \overline{OB} &= \overline{OD'} \cdot \overline{OB} - \overline{OD'} \cdot \overline{BS}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{OS}\cdot\overline{OB} &= \overline{OD'}\cdot(\overline{OB}-\overline{BS}) \\
\overline{OD'} &= \frac{\overline{OS}\cdot\overline{OB}}{\overline{OB}-\overline{BS}} \qquad (18)
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\overline{OS}=|s|$ und (12):

$$\begin{aligned}
\overline{OD'} &= \frac{|s|\cdot\frac{|s|\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}}{\frac{|s|\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-\frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}} \\
&= \frac{|s|\sin\beta}{\sin\beta-\sin\alpha} \qquad (19)
\end{aligned}$$

2.4.4 Radius der 2. Dandelin-Kugel

$$\begin{aligned}
\overline{D'S} &= \overline{OD'}-\overline{OS} \\
&= \frac{|s|\sin\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}-|s| \\
&= |s|\left(\frac{\sin\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}-1\right) \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r'=\overline{D'F'} &= \overline{D'S}\sin\beta \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta-\sin\alpha} \qquad (20)
\end{aligned}$$

2.5 Lineare Exzentrizität

Unter Verwendung von (17) erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}
\overline{FS} &= \frac{r}{\tan\beta} \qquad (21) \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha+\sin\beta)\tan\beta} \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} \qquad (22)
\end{aligned}$$

$$\overline{AF} = \overline{AS} - \overline{FS} \tag{23}$$

(11) und (22) einsetzen! Vereinfachung möglich?

$$e = a - \overline{AF} \tag{24}$$

(14) und (23) einsetzen! Vereinfachung möglich?

2.6 Numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \tag{25}$$

(24) und (14) einsetzen! Vereinfachung möglich?

2.7 Kleine Halbachse

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} \tag{26}$$

(14) und (24) einsetzen! Vereinfachung möglich?

2.8 Halbparameter

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{27}$$

(14) und (26) einsetzen! Vereinfachung möglich?

2.9 Abstand zwischen Mittelpunkt und Direktrix

$$d = \frac{a^2}{e} = \frac{a}{\varepsilon} \tag{28}$$

(14) und (24) beziehungsweise (25) einsetzen! Vereinfachung möglich?

2.10 Koordinaten

2.10.1 Koordinaten des 1. Hauptscheitels

$$
\begin{aligned}
x_A &= -\frac{s\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} \\
y_A &= 0 \\
z_A &= \frac{s\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}
\end{aligned} \tag{29}
$$

2.10.2 Koordinaten des 2. Hauptscheitels

$$
\begin{aligned}
x_B &= \frac{s\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha} \\
y_B &= 0 \\
z_B &= \frac{s\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}
\end{aligned} \tag{30}
$$

2.10.3 Koordinaten des Ellipsenmittelpunkts

Der Ellipsenmittelpunkt M ergibt sich als Mittelpunkt der beiden Hauptscheitel A und B.

$$
\begin{aligned}
x_M &= \frac{1}{2}(x_A+x_B) \\
y_M &= 0 \\
z_M &= \frac{1}{2}(z_A+z_B)
\end{aligned} \tag{31}
$$

(29) und (30) einsetzen!

2.10.4 Koordinaten des 1. Brennpunkts

$$
\begin{aligned}
|x_F| &= \overline{SF}\sin\beta \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} \qquad \text{(siehe (22))} \\
x_F &= -s\,\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_F &= s + \tan(90^\circ - \beta)\, x_F \\
&= s - \cot\beta \cdot s \frac{\sin\alpha \sin\beta \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s - s\,\frac{\sin\alpha \cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s\left(1 - \frac{\sin\alpha \cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right) \\
&= s\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s\,\frac{\sin\alpha(1 - \cos^2\beta) + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s\,\frac{\sin\alpha \sin^2\beta + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s\,\frac{\sin\beta(\sin\alpha\sin\beta + 1)}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst:

$$
\begin{aligned}
x_F &= -s\,\frac{\sin\alpha \sin\beta \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
y_F &= 0 \\
z_F &= s\,\frac{\sin\beta(1 + \sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned} \tag{32}
$$

2.10.5 Koordinaten des 2. Brennpunkts

Unter Verwendung von (20) erhält man zunächst:

$$
\overline{F'S} = \frac{r'}{\tan\beta} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&= |s|\,\frac{\sin\alpha \sin\beta}{(\sin\beta - \sin\alpha)\tan\beta} \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}
\end{aligned} \tag{34}
$$

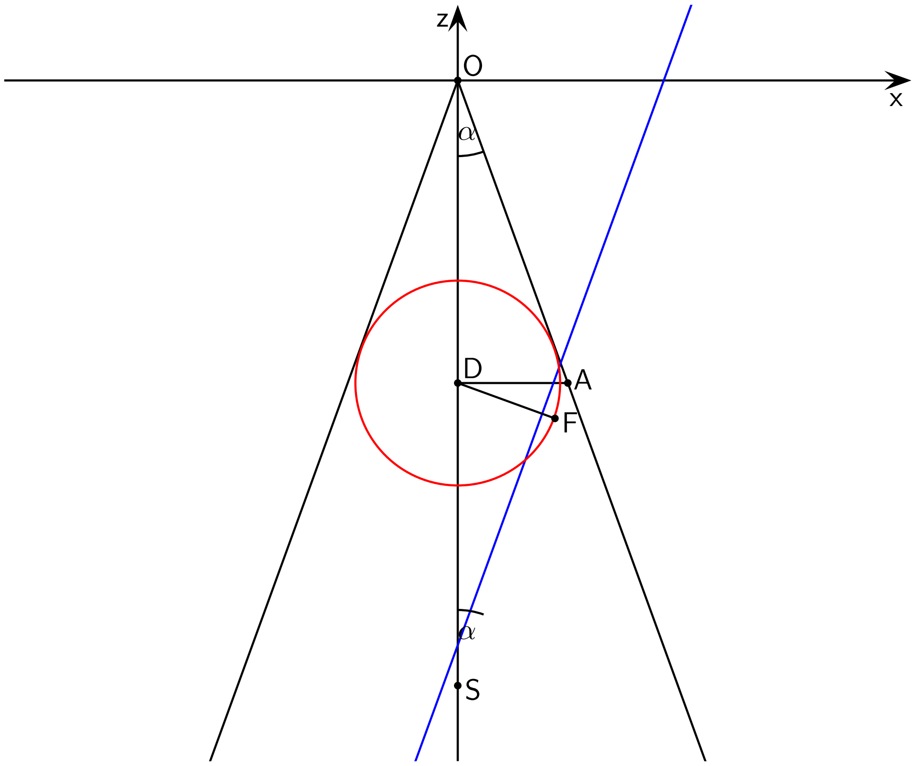
$$
\begin{aligned}
|x_{F'}| &= \overline{SF'}\sin\beta \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \qquad \text{(siehe (34))} \\
x_{F'} &= s\,\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{F'} &= s + \tan(90^\circ - \beta)\, x_{F'} \\
&= s + \cot\beta \cdot s \frac{\sin\alpha \sin\beta \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
&= s + s\,\frac{\sin\alpha \cos^2\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
&= s\left(1 + \frac{\sin\alpha \cos^2\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}\right) \\
&= s\,\frac{\sin\beta - \sin\alpha + \sin\alpha \cos^2\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
&= s\,\frac{\sin\beta - \sin\alpha(1 - \cos^2\beta)}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
&= s\,\frac{\sin\beta - \sin\alpha \sin^2\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
&= s\,\frac{\sin\beta(1 - \sin\alpha \sin\beta)}{\sin\beta - \sin\alpha}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst:

$$
\begin{aligned}
x_{F'} &= s\,\frac{\sin\alpha \sin\beta \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \\
y_{F'} &= 0 \\
z_{F'} &= s\,\frac{\sin\beta(1 - \sin\alpha \sin\beta)}{\sin\beta - \sin\alpha}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

3 Parabel



Dandelin-Kugel einer Parabel

3.1 Entfernungen

$$\overline{OD} = \frac{1}{2}|s| \tag{36}$$

$$\overline{AO} = \overline{AS} = \frac{|s|}{2\cos\alpha} \tag{37}$$

$$\overline{DA} = \frac{|s|\tan\alpha}{2} \tag{38}$$

3.2 Dandelin-Kugel

Der Mittelpunkt D der Dandelin-Kugel ist der Mittelpunkt von O und S. Der Radius ist gegeben durch

$$\begin{aligned} r = \overline{DF} &= \overline{DA}\cos\alpha \\ &= \frac{|s|\tan\alpha}{2}\cos\alpha \end{aligned}$$

$$= \frac{|s| \sin\alpha}{2} \tag{39}$$

3.3 Halbparameter

$$\begin{aligned} p &= 2\,\overline{AF} \\ &= 2\,\overline{DA}\sin\alpha \\ &= 2\,\frac{|s|\tan\alpha}{2}\sin\alpha \\ &= |s|\tan\alpha\sin\alpha \end{aligned} \tag{40}$$

3.4 Koordinaten

3.4.1 Koordinaten des Scheitels

$$\begin{aligned} x_A &= -\frac{s}{2}\tan\alpha \\ y_A &= 0 \\ z_A &= \frac{s}{2} \end{aligned} \tag{41}$$

3.4.2 Koordinaten des Brennpunkts

$$\overline{FS} = \frac{|s|}{2}\cos\alpha \tag{42}$$

Mithilfe des Strahlensatzes findet man:

$$\begin{aligned} x_F : x_A &= \overline{FS} : \overline{AS} \\ x_F &= \frac{x_A \overline{FS}}{\overline{AS}} \end{aligned}$$

Einsetzen von (41), (42) und (37) ergibt:

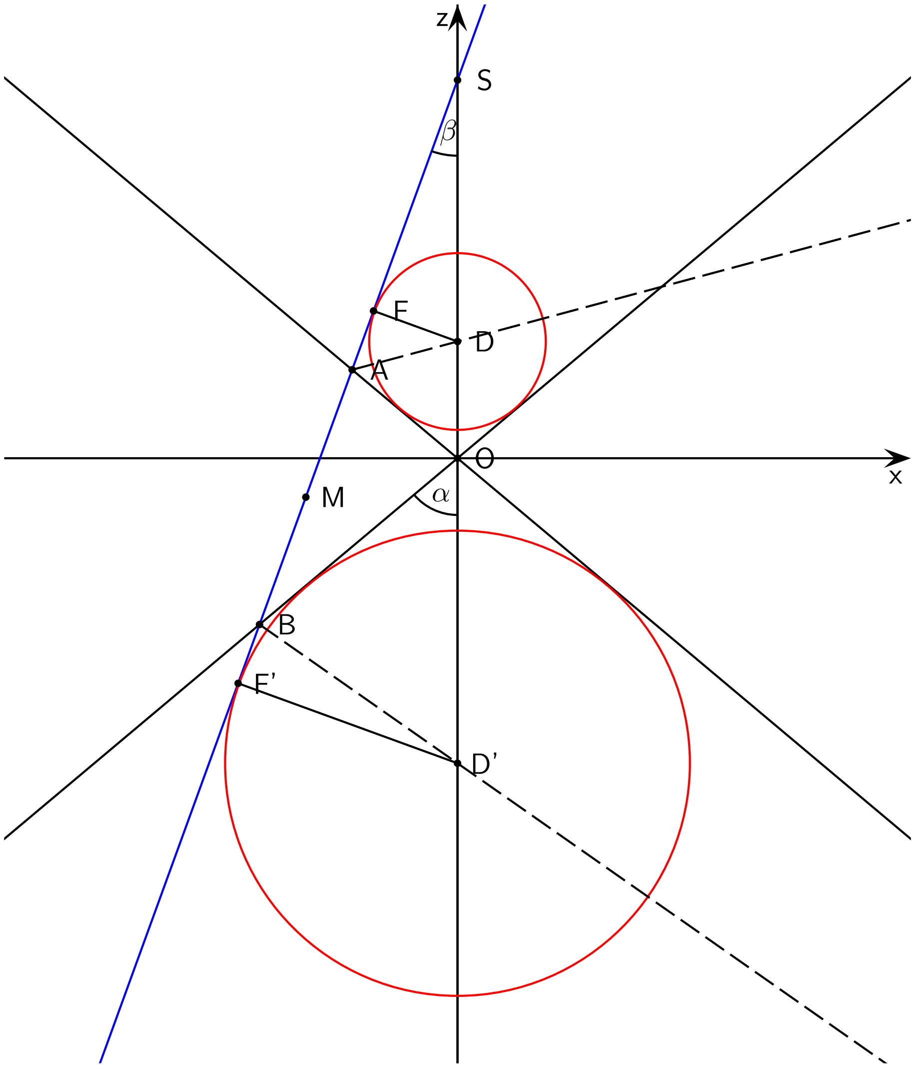
$$\begin{aligned} x_F &= \frac{-\frac{s}{2}\tan\alpha \cdot \frac{|s|}{2}\cos\alpha}{\frac{|s|}{2\cos\alpha}} \\ &= -\frac{s}{2}\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_F &= s + \tan(90^\circ - \alpha)x_F \\
&= s + \cot\alpha(-\frac{s}{2}\ \sin\alpha\cos\alpha) \\
&= s - \frac{s}{2}\cos^2\alpha \\
&= s(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
x_F &= -\frac{s}{2}\sin\alpha\cos\alpha \\
y_F &= 0 \\
z_F &= s(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha)
\end{aligned} \tag{43}$$

4 Hyperbel



Dandelin-Kugeln einer Hyperbel

4.1 Entfernungen

Dreieck OSA: Gegeben $\overline{OS} = |s|$, Winkel α (bei O), Winkel β (bei S); Sinussatz

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\beta} = \frac{\overline{OS}}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{|s|}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\overline{OA} = \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{AS}}{\sin\alpha} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{|s|}{\sin(\alpha+\beta)} \\
\overline{AS} &= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Dreieck OSB: Gegeben $\overline{OS} = |s|$, Winkel $180^\circ - \alpha$ (bei O), Winkel β (bei S); Sinussatz

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\sin\beta} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha))} = \frac{|s|}{\sin(\alpha-\beta)} \\
\overline{OB} &= \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad (46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{BS}}{\sin(180^\circ - \alpha)} &= \frac{\overline{OS}}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{|s|}{\sin(\alpha-\beta)} \\
\overline{BS} &= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad (47)
\end{aligned}
$$

4.2 Reelle Halbachse

Reelle Achse:

$$
\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{BS} - \overline{AS} \\
&= \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Reelle Halbachse:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}\overline{AB} \\
&= \frac{1}{2}|s|\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\right)
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen von (4) folgt daraus:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}|s|\sin\alpha\cdot\left(-\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}\right) \\
&= |s|\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} \qquad (48)
\end{aligned}
$$

4.3 Dandelin-Kugeln

Die beiden Dandelin-Kugel sind die Kugeln mit Mittelpunkt auf der Kegelachse, die zugleich den Kegel und die Ebene berühren. Die Dandelin-Kugel, die näher am Schnittpunkt von Kegelachse und Ebene liegt, wird hier als 1. Dandelin-Kugel bezeichnet.

4.3.1 Mittelpunkt der 1. Dandelin-Kugel

In der Schnittzeichnung ist D ein Ankreismittelpunkt des Dreiecks OAB und somit der Schnittpunkt von einer Innenwinkelhalbierenden und zwei Außenwinkelhalbierenden dieses Dreiecks. D liegt folglich auf der Halbierungslinie des Außenwinkels von $\sphericalangle OAB$. Ein Satz der Dreiecksgeometrie besagt, dass eine Außenwinkelhalbierende die Gegenseite (außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser Satz wird nun auf das Dreieck OSA angewendet.

$$
\begin{aligned}
\overline{OD} : \overline{DS} &= \overline{OA} : \overline{AS} \\
\overline{OD} : (\overline{OS} - \overline{OD}) &= \overline{OA} : \overline{AS} \\
\overline{OD} \cdot \overline{AS} &= (\overline{OS} - \overline{OD}) \cdot \overline{OA} \\
\overline{OD} \cdot \overline{AS} &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} - \overline{OD} \cdot \overline{OA} \\
\overline{OD} \cdot \overline{AS} + \overline{OD} \cdot \overline{OA} &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} \\
\overline{OD} \cdot (\overline{AS} + \overline{OA}) &= \overline{OS} \cdot \overline{OA} \\
\overline{OD} &= \frac{\overline{OS} \cdot \overline{OA}}{\overline{AS} + \overline{OA}} \qquad (49)
\end{aligned}
$$

Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\overline{OD} &= \frac{|s| \cdot \frac{|s| \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}{\frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}} \\
&= \frac{|s|\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \qquad (50)
\end{aligned}
$$

4.3.2 Radius der 1. Dandelin-Kugel

$$
\begin{aligned}
\overline{DS} &= \overline{OS} - \overline{OD} \\
&= |s| - \frac{|s|\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= |s| \left(1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right) \\
&= |s| \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r = \overline{DF} &= \overline{DS}\sin\beta \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}
\end{aligned} \tag{51}
$$

4.3.3 Mittelpunkt der 2. Dandelin-Kugel

In der Schnittzeichnung ist D' ein Ankreismittelpunkt des Dreiecks OAB und somit Schnittpunkt von einer Innenwinkelhalbierenden und zwei Außenwinkelhalbierenden dieses Dreiecks. D' liegt folglich auf der Halbierungslinie des Außenwinkels von $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OBS$. Ein Satz der Dreiecksgeometrie besagt, dass eine Außenwinkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite (außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser Satz nun wird auf Dreieck OSB angewendet.

$$
\begin{aligned}
\overline{OD'} : \overline{D'S} &= \overline{OB} : \overline{BS} \\
\overline{OD'} : (\overline{OD'} + \overline{OS}) &= \overline{OB} : \overline{BS} \\
\overline{OD'} \cdot \overline{BS} &= (\overline{OD'} + \overline{OS}) \cdot \overline{OB} \\
\overline{OD'} \cdot \overline{BS} &= \overline{OD'} \cdot \overline{OB} + \overline{OS} \cdot \overline{OB} \\
\overline{OD'} \cdot \overline{BS} - \overline{OD'} \cdot \overline{OB} &= \overline{OS} \cdot \overline{OB} \\
\overline{OD'} \cdot (\overline{BS} - \overline{OB}) &= \overline{OS} \cdot \overline{OB} \\
\overline{OD'} &= \frac{\overline{OS} \cdot \overline{OB}}{\overline{BS} - \overline{OB}}
\end{aligned} \tag{52}
$$

Einsetzen von $\overline{OS} = |s|$, (46) und (47):

$$
\begin{aligned}
\overline{OD'} &= \frac{|s| \cdot \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}}{\frac{|s|\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{|s|\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}} \\
&= \frac{|s|\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}
\end{aligned} \tag{53}
$$

4.3.4 Radius der 2. Dandelin-Kugel

$$
\begin{aligned}
\overline{D'S} &= \overline{OD'} + \overline{OS} \\
&= \frac{|s|\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} + |s| \\
&= |s|\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} + 1\right) \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r' = \overline{D'F'} &= \overline{D'S}\sin\beta \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} \qquad (54)
\end{aligned}
$$

4.4 Lineare Exzentrizität

Unter Verwendung von (51) erhält man zunächst:

$$
\begin{aligned}
\overline{FS} &= \frac{r}{\tan\beta} \qquad (55) \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha+\sin\beta)\tan\beta} \\
&= |s|\,\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} \qquad (56)
\end{aligned}
$$

$$
\overline{AF} = \overline{AS}-\overline{FS} \qquad (57)
$$

(45) und (56) einsetzen! Vereinfachung möglich?

$$
e = a+\overline{AF} \qquad (58)
$$

(48) und (57) einsetzen! Vereinfachung möglich?

4.5 Numerische Exzentrizität

$$
\varepsilon = \frac{e}{a} \qquad (59)
$$

(58) und (48) einsetzen! Vereinfachung möglich?

4.6 Imaginäre Halbachse

$$
b = \sqrt{e^2-a^2} \qquad (60)
$$

(48) und (58) einsetzen! Vereinfachung möglich?

4.7 Halbparameter

$$
p = \frac{b^2}{a} \qquad (61)
$$

(48) und (60) einsetzen! Vereinfachung möglich?

4.8 Abstand zwischen Mittelpunkt und Direktrix

$$d = \frac{a^2}{e} = \frac{a}{\varepsilon} \tag{62}$$

(48) und (58) beziehungsweise (59) einsetzen! Vereinfachung möglich?

4.9 Koordinaten

4.9.1 Koordinaten des 1. Hauptscheitels

$$|x_A| = \overline{OA} \sin\alpha$$

Durch Einsetzen von (44) folgt:

$$\begin{aligned} |x_A| &= \frac{|s| \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \sin\alpha \\ x_A &= -\frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_A &= -\frac{x_A}{\tan\alpha} \\ &= \frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) \tan\alpha} \\ &= \frac{s \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} x_A &= -\frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \\ y_A &= 0 \\ z_A &= \frac{s \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{63}$$

4.9.2 Koordinaten des 2. Hauptscheitels

$$|x_B| = \overline{OB} \sin\alpha$$

Durch Einsetzen von (46) folgt:

$$\begin{aligned} |x_B| &= \frac{|s| \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \sin\alpha \\ x_B &= -\frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{x_B}{\tan\alpha} \\ &= -\frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) \tan\alpha} \\ &= -\frac{s \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} x_B &= -\frac{s \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \\ y_B &= 0 \\ z_B &= -\frac{s \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned} \tag{64}$$

4.9.3 Koordinaten des Hyperbelmittelpunkts

Der Hyperbelmittelpunkt M ergibt sich als Mittelpunkt der beiden Hauptscheitel A und B.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y_M &= 0 \\ z_M &= \frac{1}{2}(z_A + z_B) \end{aligned} \tag{65}$$

(63) und (64) einsetzen!

4.9.4 Koordinaten des 1. Brennpunkts

$$
\begin{aligned}
|x_F| &= \overline{SF} \sin\beta \\
&= |s| \frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \qquad \text{(siehe (56))} \\
x_F &= -s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_F &= s + \tan(90^\circ - \beta)\, x_F \\
&= s - \cot\beta \cdot s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s - s \frac{\sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right) \\
&= s \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\alpha(1 - \cos^2\beta) + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\alpha\sin^2\beta + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\beta(\sin\alpha\sin\beta + 1)}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst:

$$
\begin{aligned}
x_F &= -s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \\
y_F &= 0 \\
z_F &= s \frac{\sin\beta(1 + \sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}
\end{aligned} \tag{66}
$$

4.9.5 Koordinaten des 2. Brennpunkts

Unter Verwendung von (54) erhält man zunächst:

$$
\begin{aligned}
\overline{F'S} &= \frac{r'}{\tan\beta} \\
&= |s| \frac{\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha - \sin\beta)\tan\beta}
\end{aligned}
$$

$$= \quad |s| \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
|x_{F'}| &= \overline{SF'}\sin\beta \\
&= |s| \frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \qquad \text{(siehe (67))} \\
x_{F'} &= -s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{F'} &= s + \tan(90^\circ - \beta)\, x_F \\
&= s - \cot\beta \cdot s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
&= s - s \frac{\sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
&= s\left(1 - \frac{\sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}\right) \\
&= s \frac{\sin\alpha - \sin\beta - \sin\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\alpha(1 - \cos^2\beta) - \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\alpha\sin^2\beta - \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
&= s \frac{\sin\beta(\sin\alpha\sin\beta - 1)}{\sin\alpha - \sin\beta}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
x_{F'} &= -s \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \\
y_{F'} &= 0 \\
z_{F'} &= s \frac{\sin\beta(\sin\alpha\sin\beta - 1)}{\sin\alpha - \sin\beta}
\end{aligned} \tag{68}$$