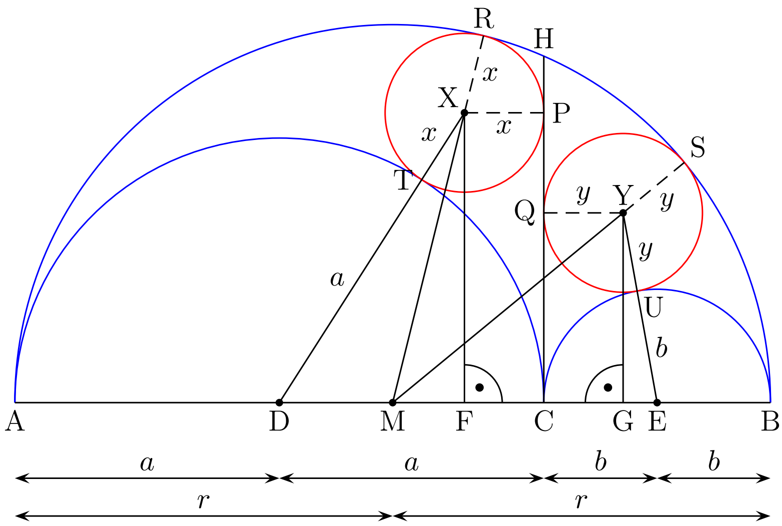
Die Zwillingskreise des Archimedes

Walter Fendt

5. März 2005



Die Skizze zeigt eine sichelförmige Figur (blau), die von drei Halbkreisen mit den Durchmessern [AB], [AC] und [CB] begrenzt wird. Diese Figur, deren Eigenschaften schon in der Antike untersucht wurden, wird als **Arbelos** (griechisch für Schustermesser) oder – nach dem griechischen Mathematiker Archimedes von Syrakus (287 bis 212 v. Chr.) – als **Sichel des Archimedes** bezeichnet. Die Mittelpunkte der drei Halbkreise heißen M, D und E, die entsprechenden Radien sind $r = \overline{\mathrm{MA}} = \overline{\mathrm{MB}}$, $a = \overline{\mathrm{DA}} = \overline{\mathrm{DC}}$ und $b = \overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{EB}}$. Weiter sei H der Punkt auf dem Halbkreis über [AB], für den die Strecke [CH] senkrecht zu [AB] verläuft.

Die beiden rot gezeichneten Kreise innerhalb der Sichelfläche, die jeweils den größten Halbkreisbogen, einen der beiden kleineren Halbkreisbögen und die Strecke [CH] berühren, nennt man die **Zwillingskreise des Archimedes**. Sie verdanken ihre Bezeichnung der Tatsache, dass ihre Radien übereinstimmen. X und Y seien die Mittelpunkte der Zwillingskreise, x und y die zugehörigen Radien.

Der Beweis, dass die Zwillingskreise gleich groß sind, erfolgt durch Berechnung der beiden Radien. Da der Satz von Pythagoras angewendet werden soll, fällt man von den Mittelpunkten X und Y die Lote auf die Strecke [AB]. Die Fußpunkte werden mit F beziehungsweise G bezeichnet. Zur Ermittlung von Radius x (linker Zwillingskreis) wendet man den Satz von Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke DFX und MFX an.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{DF}}^{\,2} + \overline{\mathrm{FX}}^{\,2} &= \overline{\mathrm{DX}}^{\,2} \\
\overline{\mathrm{MF}}^{\,2} + \overline{\mathrm{FX}}^{\,2} &= \overline{\mathrm{MX}}^{\,2}
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander erhält man

$$\overline{\mathrm{DF}}^{\,2} - \overline{\mathrm{MF}}^{\,2} = \overline{\mathrm{DX}}^{\,2} - \overline{\mathrm{MX}}^{\,2}. \tag{1}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Streckenlängen lassen sich durch a und b ausdrücken. Dabei kann die Beziehung $a+b=r$ verwendet werden, die sofort aus $2a+2b=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AB}}=2r$ folgt. Außerdem ist zu beachten, dass der gemeinsame Punkt von zwei Kreisen, die sich berühren, auf der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte liegen muss. In der Zeichnung sind die Berührpunkte der Halbkreise mit R, S, T und U bezeichnet. R liegt auf der Verlängerung von [MX], S auf der Verlängerung von [MY], T auf [DX] und U auf [EY]. Die gemeinsamen Punkte der Zwillingskreise mit der Lotstrecke [CH] werden P beziehungsweise Q genannt.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{DF}} &= \overline{\mathrm{DC}} - \overline{\mathrm{FC}} = a - x \\
\overline{\mathrm{MF}} &= \overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{FC}} \\
&= 2a - r - x = 2a - (a+b) - x = a - b - x \\
\overline{\mathrm{DX}} &= \overline{\mathrm{DT}} + \overline{\mathrm{TX}} = a + x \\
\overline{\mathrm{MX}} &= \overline{\mathrm{MR}} - \overline{\mathrm{XR}} = r - x = a + b - x
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{DF}}^{\,2} - \overline{\mathrm{MF}}^{\,2} &= (a-x)^2 - (a-b-x)^2 \\
&= (a^2 - 2ax + x^2) - (a^2 + b^2 + x^2 - 2ab - 2ax + 2bx) \\
&= a^2 - 2ax + x^2 - a^2 - b^2 - x^2 + 2ab + 2ax - 2bx \\
&= -b^2 + 2ab - 2bx
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{DX}}^2 - \overline{\mathrm{MX}}^2 &= (a+x)^2 - (a+b-x)^2 \\
&= (a^2+2ax+x^2) - (a^2+b^2+x^2+2ab-2ax-2bx) \\
&= a^2+2ax+x^2-a^2-b^2-x^2-2ab+2ax+2bx \\
&= 4ax-b^2-2ab+2bx
\end{aligned}$$

folgt aus (1)

$$-b^2+2ab-2bx = 4ax-b^2-2ab+2bx$$

und weiter:

$$\begin{aligned}
4ab &= 4ax+4bx \\
4ab &= 4x(a+b) \\
x &= \frac{ab}{a+b} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich der Radius y des rechten Zwillingskreises ermitteln. Gemäß Pythagoras ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MG}}^2 + \overline{\mathrm{GY}}^2 &= \overline{\mathrm{MY}}^2 \\
\overline{\mathrm{EG}}^2 + \overline{\mathrm{GY}}^2 &= \overline{\mathrm{EY}}^2
\end{aligned}$$

mit der Folgerung

$$\overline{\mathrm{MG}}^2 - \overline{\mathrm{EG}}^2 = \overline{\mathrm{MY}}^2 - \overline{\mathrm{EY}}^2. \qquad (3)$$

Für die Streckenlängen in dieser Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MG}} &= \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CG}} - \overline{\mathrm{AM}} \\
&= 2a+y-r = 2a+y-(a+b) = a-b+y \\
\overline{\mathrm{EG}} &= \overline{\mathrm{EC}} - \overline{\mathrm{CG}} = b-y \\
\overline{\mathrm{MY}} &= \overline{\mathrm{MS}} - \overline{\mathrm{YS}} = r-y = a+b-y \\
\overline{\mathrm{EY}} &= \overline{\mathrm{EU}} + \overline{\mathrm{UY}} = b+y
\end{aligned}$$

Für die beiden Seiten von Gleichung (3) folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MG}}^2 - \overline{\mathrm{EG}}^2 &= (a-b+y)^2 - (b-y)^2 \\
&= (a^2+b^2+y^2-2ab+2ay-2by) - (b^2-2by+y^2) \\
&= a^2+b^2+y^2-2ab+2ay-2by-b^2+2by-y^2 \\
&= a^2-2ab+2ay
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MY}}^{\,2} - \overline{\mathrm{EY}}^{\,2} &= (a+b-y)^2 - (b+y)^2 \\
&= (a^2+b^2+y^2+2ab-2ay-2by) - (b^2+2by+y^2) \\
&= a^2+b^2+y^2+2ab-2ay-2by-b^2-2by-y^2 \\
&= a^2+2ab-2ay-4by.
\end{aligned}$$

Nach (3) müssen die beiden Rechenausdrücke gleich sein.

$$a^2-2ab+2ay \quad = \quad a^2+2ab-2ay-4by$$

Einfache Umformungen ergeben nun:

$$\begin{aligned}
4ay+4by &= 4ab \\
4y(a+b) &= 4ab \\
y &= \frac{ab}{a+b} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) und (4) beweisen, dass die beiden Zwillingskreise gleiche Radien haben – zumindest für den in der Skizze dargestellten Fall ($a > b$). Im umgekehrten Fall ($a < b$) sind die Rollen von a und b sowie von x und y vertauscht, sodass für x und y dieselben Ergebnisse herauskommen. Gilt schließlich $a = b$, so ist die ganze Figur achsensymmetrisch, und die Gleichheit der Radien versteht sich von selbst.