Legendre-Polynome

Walter Fendt

24. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Legendre-Polynome (benannt nach Adrien-Marie Legendre, 1752 bis 1833) spielen insbesondere in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Kugelflächenfunktionen definieren, die unter anderem in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik – etwa bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung – benötigt werden.

Auf den folgenden Seiten habe ich wichtige Eigenschaften dieser Polynome zusammengestellt. Die zugehörigen Beweise sind ausführlicher als in der wissenschaftlichen Literatur üblich. Der Anhang enthält eine Tabelle der Legendre-Polynome bis zum Grad 20. Die Rechenausdrücke dazu wurden mithilfe eines selbstgestrickten Java-Programms berechnet.

2. Definition (Rodrigues-Formel)

Unter einem **Legendre-Polynom** versteht man ein Polynom des folgenden Typs:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{1}$$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$ der Grad des Polynoms. Die Definitionsgleichung bezeichnet man auch als Rodrigues-Formel.

Beispiel ($n = 3$)**:**

$$\begin{aligned}
(x^2-1)^3 &= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)^3] &= 6x^5 - 12x^3 + 6x \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(x^2-1)^3] &= 30x^4 - 36x^2 + 6 \\
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(x^2-1)^3] &= 120x^3 - 72x \\
P_3(x) &= \frac{1}{3!\cdot 2^3}(120x^3 - 72x) \\
&= \frac{1}{6\cdot 8}\cdot 24(5x^3 - 3x) \\
&= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)
\end{aligned}$$

Eine Tabelle der Legendre-Polynome bis $P_{20}(x)$ findet sich im Anhang A.

3. Explizite Formel

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \qquad (2)}$$

Beweis: Der Term $(x^2-1)^n$, der in der Rodrigues-Formel (1) vorkommt, lässt sich durch den binomischen Satz ausdrücken:

$$\begin{aligned}
(x^2-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x^2)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2n-2k}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll n-mal nach x differenziert werden. Dazu benötigt man die Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^{2n-2k} &= (2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n-2k+2)(n-2k+1)x^{2n-2k-n} \\
&= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist allerdings nur für $k \leq \frac{n}{2}$ verwendbar; für größeres k wird die betrachtete Ableitung gleich 0.

Somit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Der maximale Summationsindex ist $\lfloor n/2 \rfloor$, also die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ ist.

Unter Berücksichtigung von $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ergibt sich schließlich die Behauptung:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{n!\,2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \\
&= \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}
\end{aligned}$$

4. Einfache Eigenschaften

P_n ist für gerades n eine gerade Funktion, für ungerades n eine ungerade Funktion.

$$P_n(-x) = \begin{cases} P_n(x), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -P_n(x), & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{3}$$

Beweis: In $(x^2-1)^n$ kommen nur gerade Exponenten vor. Beim einmaligen Differenzieren werden die Exponenten um 1 kleiner; daher führt n-maliges Differenzieren bei geradem n zu ausschließlich geraden Exponenten und bei ungeradem n zu ausschließlich ungeraden Exponenten.

$$P_n(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{4}$$

Beweis: Zunächst sei n eine gerade Zahl. Um $P_n(0)$ zu erhalten, betrachtet man in der expliziten Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

(siehe (2)) den Summanden mit dem Index $k = \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \frac{1}{2^n}(-1)^{n/2} \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2})!0!} \\ &= \frac{1}{2^n}(-1)^{n/2} \frac{n!}{((\frac{n}{2})!)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n &= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n/2 \text{ Faktoren}} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2}-1) \cdot \frac{n}{2}) \\ &= 2^{n/2} \cdot (\frac{n}{2})! \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-1) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n} \\ &= \frac{n!}{2^{n/2} \cdot (\frac{n}{2})!} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot n} &= \frac{\frac{n!}{2^{n/2} \cdot (\frac{n}{2})!}}{2^{n/2} \cdot (\frac{n}{2})!} \\ &= \frac{n!}{2^n((\frac{n}{2})!)^2} \end{aligned}$$

Zusammen mit (5) ist damit die Behauptung für gerades n bewiesen.

Für ungerades n ist $P_n(0) = 0$ unmittelbar einsichtig, da P_n eine ungerade Funktion ist.

$$P_n(1) = 1 \tag{6}$$

Beweis (nach [Sm32], S. 420):

Um diese Aussage nachzuweisen, wendet man gemäß der Definitionsgleichung (1) die Leibniz'sche Formel an, um von dem Produkt $(x^2-1)^n = (x+1)^n(x-1)^n$ die n-te Ableitung zu berechnen:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!\,2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \qquad (7) \\ &= \frac{1}{n!\,2^n} \left\{ \binom{n}{0} (x+1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n] \right. \\ &\quad + \binom{n}{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x+1)^n] \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[(x-1)^n] \\ &\quad \left. + \ldots + \binom{n}{n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x+1)^n](x-1)^n \right\} \end{aligned}$$

Nun gilt für $k < n$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x-1)^n]\right|_{x=1} = 0,$$

weil aus der n-fachen Nullstelle bei 1 durch k-maliges Differenzieren eine $(n-k)$-fache Nullstelle wird. Daher fallen für $x = 1$ in (7) fast alle Summanden heraus:

$$P_n(1) \quad = \quad \frac{1}{n!\,2^n}(1+1)^n \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n]\Big|_{x=1}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n] \quad = \quad n!$$

folgt daraus die Behauptung:

$$P_n(1) \quad = \quad \frac{1}{n!\,2^n}2^n n! = 1$$

5. Differentialgleichung

Das Legendre-Polynom $P_n(x)$ erfüllt die **Legendre-Differentialgleichung**:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \quad = \quad 0 \tag{8}$$

Beweis (nach [GF2], S. 202): Nach der Rechenregel für die Ableitung einer Potenz und der Kettenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)^n] \quad = \quad n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x$$

und somit

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)^n] = 2nx(x^2-1)^n.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung werden mithilfe der Leibniz'schen Regel für höhere Ableitungen von Produkten $(n+1)$-mal nach x differenziert. Dabei fallen auf der linken Seite alle Summanden mit Ausnahme der ersten drei weg, weil die 3. Ableitung von x^2-1 und alle höheren Ableitungen gleich 0 sind. Entsprechend bleiben auf der rechten Seite nur die ersten zwei Summanden übrig.

$$\begin{aligned}
&\binom{n+1}{0}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}[(x^2-1)^n]+\binom{n+1}{1}2x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]\\
&+\binom{n+1}{2}2\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[(x^2-1)^n]\\
=\ &\binom{n+1}{0}2nx\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]+\binom{n+1}{1}2n\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[(x^2-1)^n]
\end{aligned}$$

Mit $\binom{n+1}{0}=1$, $\binom{n+1}{1}=n+1$ und $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$ erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
&(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}[(x^2-1)^n]+2(n+1)x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]+n(n+1)\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[(x^2-1)^n]\\
=\ &2nx\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]+2n(n+1)\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[(x^2-1)^n]
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\frac{1}{n!2^n}$ und Verwendung der Definition von $P_n(x)$ (Rodrigues-Formel, siehe (1)) ergeben dann:

$$(x^2-1)P_n''(x)+2(n+1)xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x) = 2nxP_n'(x)+2n(n+1)P_n(x)$$

Bringt man alle Summanden auf die linke Seite, so erhält man

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x) = 0$$

und damit die Behauptung:

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x) = 0$$

6. Rekursionsformeln

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Rekursionsformel

$$P_n'(x) = xP_{n-1}'(x)+nP_{n-1}(x). \tag{9}$$

Beweis: Zu

$$Q_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

soll die Ableitung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n] \\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^{n-1}\cdot 2nx] \end{aligned}$$

Mithilfe der Leibniz'schen Regel für höhere Ableitungen von Produkten erhält man:

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= \binom{n}{0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^{n-1}]\cdot 2nx + \binom{n}{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[(x^2-1)^{n-1}]\cdot 2n \\ &= 2nxQ_{n-1}'(x) + 2n^2 Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Wegen $Q_n(x) = 2^n n! P_n(x)$ beziehungsweise $Q_{n-1}(x) = 2^{n-1}(n-1)!P_{n-1}(x)$ (siehe Rodrigues-Formel (1)) folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned} 2^n n! P_n'(x) &= 2nx\cdot 2^{n-1}(n-1)!P_{n-1}'(x) + 2n^2\cdot 2^{n-1}(n-1)!P_{n-1}(x) \\ &= 2^n n!\, xP_{n-1}'(x) + 2^n n!\, nP_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Beidseitige Division durch $2^n n!$ liefert die behauptete Rekursionsformel.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Rekursionsformel

$$nP_n(x) = nxP_{n-1}(x) + (x^2-1)P_{n-1}'(x). \tag{10}$$

Beweis: Die Tatsache, dass P_n die Legendre-Differentialgleichung erfüllt, kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)P_n'(x)] = n(n+1)P_n(x)$$

Zusammen mit (9) folgt daraus:

$$\begin{aligned} n(n+1)P_n(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(x^2-1)P_{n-1}'(x) + n(x^2-1)P_{n-1}(x)] \\ &= 1\cdot(x^2-1)P_{n-1}'(x) + x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)P_{n-1}'(x)] \\ &\quad + n[2x\cdot P_{n-1}(x) + (x^2-1)\cdot P_{n-1}'(x)] \end{aligned}$$

Wegen der Legendre-Differentialgleichung (dieses Mal für den Index $n-1$) gilt entsprechend wie oben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2-1)P'_{n-1}(x)] \quad = \quad (n-1)nP_{n-1}(x)$$

Einsetzen in die vorherige Aussage ergibt:

$$\begin{aligned} n(n+1)P_n(x) \quad &= \quad (x^2-1)P'_{n-1}(x) + x(n-1)nP_{n-1}(x) \\ &\quad\quad + n[2xP_{n-1}(x) + (x^2-1)P'_{n-1}(x)] \\ &= \quad (x^2-1)P'_{n-1}(x)(1+n) + nxP_{n-1}(x)(n-1+2) \end{aligned}$$

Der Faktor $(n+1)$ lässt sich herauskürzen:

$$nP_n(x) \quad = (x^2-1)P'_{n-1}(x) + nxP_{n-1}(x)$$

Damit ist die Behauptung bestätigt.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt die Rekursionsformel

$$nP_n(x) \quad = \quad (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x). \tag{11}$$

Beweis: Die Rekursionsformel (9) lautet für den Index $n-1$:

$$P'_{n-1}(x) \quad = \quad xP'_{n-2}(x) + (n-1)P_{n-2}(x)$$

Diese Gleichung wird mit (x^2-1) multipliziert:

$$(x^2-1)P'_{n-1}(x) \quad = \quad x(x^2-1)P'_{n-2}(x) + (n-1)(x^2-1)P_{n-2}(x) \tag{12}$$

Aus (10) ergibt sich jedoch

$$(x^2-1)P'_{n-1}(x) \quad = \quad nP_n(x) - nxP_{n-1}(x)$$

und

$$(x^2-1)P'_{n-2}(x) \quad = \quad (n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)xP_{n-2}(x).$$

Durch Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in (12) lassen sich die Ableitungen eliminieren:

$$\begin{aligned} nP_n(x) - nxP_{n-1}(x) &= x[(n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)xP_{n-2}(x)] \\ &\quad + (n-1)(x^2-1)P_{n-2}(x) \\ &= (n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)x^2P_{n-2}(x) \\ &\quad + (n-1)x^2P_{n-2}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \\ &= (n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

Addiert man noch auf beiden Seiten $nxP_{n-1}(x)$, so erhält man mit

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

die Behauptung.

7. Orthogonalität

Die Legendre-Polynome bilden ein Orthogonalsystem, das heißt es gilt:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für } m,n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n \tag{13}$$

Beweis (nach [Sm32], S. 324):

Für die beiden Legendre-Polynome $P_m(x)$ und $P_n(x)$ gilt aufgrund der Differentialgleichung (8):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_m(x)] + m(m+1)P_m(x) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $P_n(x)$ und die zweite mit $P_m(x)$ und subtrahiert man anschließend die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man:

$$\begin{aligned} P_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_m(x)] - P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_n(x)] & \\ + [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

Umstellung der Summanden ergibt:

$$\begin{aligned} & [m(m+1)-n(n+1)]P_m(x)P_n(x) \\ = \; & P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_n'(x)] - P_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_m'(x)] \end{aligned}$$

Nun wird über das Intervall $[-1;+1]$ integriert:

$$\begin{aligned} & [m(m+1)-n(n+1)]\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad (14) \\ = & \int\limits_{-1}^{+1}\left\{P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_n'(x)] - P_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_m'(x)]\right\}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integriert man den ersten Summanden auf der rechten Seite partiell, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_n'(x)]\,\mathrm{d}x &= \left[P_m(x)(1-x^2)P_n'(x)\right]_{-1}^{+1} \\ &\quad - \int\limits_{-1}^{+1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Weil beim Einsetzen von $+1$ oder -1 in $(1-x^2)$ null herauskommt, fällt auf der rechten Seite der erste Summand weg.

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_n'(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{+1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)\,\mathrm{d}x$$

Entsprechend gilt:

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_m'(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{+1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)\,\mathrm{d}x$$

Auf diese Weise vereinfacht sich Gleichung (14) deutlich:

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Für $m \neq n$ kann der Faktor vor dem Integral nicht gleich 0 sein. Daher kann man durch diesen Faktor dividieren, womit die Behauptung

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad 0 \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n$$

bewiesen ist.

8. Normierungseigenschaft

Für die Legendre-Polynome $P_n(x)$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) gilt:

$$\int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{2}{2n+1} \tag{15}$$

Beweis: Gesucht ist (siehe Rodrigues-Formel (1)) das Integral

$$\int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\,\mathrm{d}x.$$

Dieser Rechenausdruck wird durch partielle Integration umgeformt:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2\,\mathrm{d}x \quad = \quad & \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \left\{ \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \right]_{-1}^{+1} \right. \\ & \left. - \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x \right\} \end{aligned}$$

Das Polynom $(x^2-1)^n$ hat die Nullstellen $x = \pm 1$, deren Vielfachheit jeweils n ist. Differenziert man es $(n-1)$-mal, so erhält man ein Polynom, das ebenfalls diese Nullstellen besitzt. Daher verschwindet in der letzten Formel der Ausdruck außerhalb des Integrals.

Wiederholt man das Verfahren der partiellen Integration insgesamt n-mal, so verschwindet jedesmal das außerhalb des Integrals stehende Glied, und man erhält schließlich

$$\int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n] \,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Die Ableitung im zweiten Faktor des Integranden lässt sich leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n] &= \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^{2n} - nx^{2n-2} + \ldots) \\ &= 2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2n)! \end{aligned}$$

Aus (16) wird folglich:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \qquad (17) \\ &= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n!\, 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit der Substitution $x = \cos\varphi$, $\mathrm{d}x = -\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$ berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\pi}^{0} (\cos^2\varphi - 1)^n (-\sin\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int\limits_{0}^{\pi} (-\sin^2\varphi)^n \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= (-1)^n \int\limits_{0}^{\pi} \sin^{2n+1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ ergibt sich weiter:

$$\int\limits_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \quad = \quad (-1)^n \cdot 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \tag{18}$$

Das Integral auf der rechten Seite kann man in umfangreicheren Formelsammlungen nachschlagen:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \quad = \quad \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)} \tag{19}$$

Aus (18) und (19) erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \quad &= \quad (-1)^n \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \quad (-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}
\end{aligned}$$

Einsetzen in (17) führt zu:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad &= \quad (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n!\,2^{2n}} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \quad (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n!\,2^{2n}} \cdot (-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)} \\
&= \quad \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n!\,2^{2n}} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle kann die Beziehung

$$2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot 2n \quad = \quad 2^n \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = 2^n n!$$

ausgenützt werden.

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{2^n\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot 2n} \cdot \frac{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

Es stellt sich heraus, dass sämtliche Faktoren in den Zählern und Nennern der beiden letzten Brüche durch Kürzen verschwinden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

9. Integraldarstellung

Für $x \in \mathbb{C} \setminus \{+1; -1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\varphi \right]^n \mathrm{d}\varphi. \tag{20}$$

Dabei ist es gleichgültig, welcher Wert für die Wurzel $\sqrt{x^2-1}$ verwendet wird.

Beweis (nach [Sm32], S. 415):

Gemäß der Cauchy'schen Integralformel gilt

$$(x^2-1)^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{z-x} \,\mathrm{d}z,$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der im Gegenuhrzeigersinn um den Punkt x der komplexen Zahlenebene läuft. Differenziert man diese Gleichung n-mal nach x (auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen), so erhält man gemäß der Definition von $P_n(x)$ (siehe Gleichung (1))

$$n!\, 2^n P_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \cdot n! \,\mathrm{d}z$$

beziehungsweise

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \tag{21}$$

Als Weg C wählt man sinnvollerweise den Kreis um x mit Radius $\sqrt{|x^2-1|}$ mit der Parametrisierung

$$z = x + \sqrt{x^2-1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{für } -\pi \le \varphi \le +\pi.$$

(Da $x \neq 1$ und $x \neq -1$ vorausgesetzt wurde, ist der Radius des Kreises positiv. Welcher der beiden Werte von $\sqrt{x^2-1}$ gewählt wird, ist unwichtig.)

Führt man im Integral von Gleichung (21) die Variablensubstitution durch, so erhält man:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^{n+1}\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{((x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^2-1)^n}{(\sqrt{x^2-1})^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}} \cdot \mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^2-1}{2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right]^n \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+(x^2-1)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}{2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right]^n \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}+x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right]^n \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = (\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi) = 2\cos\varphi$$

folgt daraus weiter

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi.$$

Da der Integrand eine gerade Funktion von φ ist, ergibt sich so die endgültige Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi.$$

10. Erzeugende Funktion

Für $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{22}$$

Dabei ist für $-1 \leq x \leq +1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe auf der rechten Seite gleich 1.

Diese Beziehung kann auch zur Definition der Legendre-Polynome verwendet werden. Daher bezeichnet man die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \tag{23}$$

als **erzeugende Funktion** der Legendre-Polynome.

Beweis (nach [Sm32], S. 422f.):

Man kann $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ als Potenzreihe um 0 entwickeln, indem man z^2-2xz in die binomische Reihe für $(1+w)^{-1/2}$ (mit dem Konvergenzradius 1) einsetzt. Da die Koeffizienten dieser Reihe von x abhängen, wird hier folgende Schreibweise verwendet:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) z^n \tag{24}$$

Differenzieren dieses Ansatzes nach z ergibt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(1-2xz+z^2)^{-3/2}(-2x+2z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(x) z^{n-1} \\ (1-2xz+z^2)^{-3/2}(x-z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(x) z^{n-1} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $(1-2xz+z^2)$ und Einsetzen der Potenzreihe aus Gleichung (24) erhält man die Beziehung

$$(x-z)\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) z^n = (1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty} n p_n(x) z^{n-1}.$$

Da die Koeffizienten von z^n (für $n \geq 1$) auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen müssen, folgt daraus

$$x p_n(x) - p_{n-1}(x) = (n+1)p_{n+1}(x) - 2xnp_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x)$$

und weiter

$$(n+1)p_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) = 0. \tag{25}$$

Für die Koeffizienten von z^0 folgt entsprechend

$$xp_0(x) \quad = \quad p_1(x). \tag{26}$$

Da sich aber durch Einsetzen von $z = 0$ in (24) $p_0(x) = 1$ ergibt, muss aufgrund von (26) $p_1(x) = x$ gelten, sodass $p_0(x) = P_0(x)$ und $p_1(x) = P_1(x)$ ist. Nach der Rekursionsformel (25), die zur früher bewiesenen Rekursionsformel (11) äquivalent ist, sind die übrigen Koeffizienten $p_n(x)$ eindeutig bestimmt und jeweils gleich $P_n(x)$, womit die Gültigkeit von (22) bewiesen ist.

Nun soll der Konvergenzradius der Potenzreihe unter der Voraussetzung $-1 \leq x \leq +1$ bestimmt werden. Die singulären Punkte der erzeugenden Funktion (23) ergeben sich aus der quadratischen Gleichung $1 - 2xz + z^2 = 0$. Es handelt sich um die Punkte

$$z_{1,2} \quad = \quad x \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2}.$$

Wegen

$$|z_{1,2}|^2 = x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1$$

haben diese beiden Punkte den Absolutbetrag 1, sodass die Potenzreihe aus (24) unter der Voraussetzung $-1 \leq x \leq +1$ den Konvergenzradius 1 hat.

Letzte Änderung: 24. Mai 2019

A. Tabelle der ersten Legendre-Polynome

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
&= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \\
&= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \\
&= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right) \\
&= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right) \\
&= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16} \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}\left(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x\right) \\
&= \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x \\
P_8(x) &= \frac{1}{128}\left(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35\right) \\
&= \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_9(x) &= \frac{1}{128}\left(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x\right) \\
&= \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{10}(x) &= \frac{1}{256}\left(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63\right) \\
&= \frac{46189}{256}x^{10} - \frac{109395}{256}x^8 + \frac{45045}{128}x^6 - \frac{15015}{128}x^4 + \frac{3465}{256}x^2 - \frac{63}{256}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{11}(x) &= \frac{1}{256}\left(88179x^{11} - 230945x^9 + 218790x^7 - 90090x^5 + 15015x^3 - 693x\right) \\
&= \frac{88179}{256}x^{11} - \frac{230945}{256}x^9 + \frac{109395}{128}x^7 - \frac{45045}{128}x^5 + \frac{15015}{256}x^3 - \frac{693}{256}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{12}(x) &= \frac{1}{1024}\big(676039x^{12} - 1939938x^{10} + 2078505x^8 - 1021020x^6 + 225225x^4 \\
&\quad - 18018x^2 + 231\big) \\
&= \frac{676039}{1024}x^{12} - \frac{969969}{512}x^{10} + \frac{2078505}{1024}x^8 - \frac{255255}{256}x^6 + \frac{225225}{1024}x^4 \\
&\quad - \frac{9009}{512}x^2 + \frac{231}{1024}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{13}(x) &= \frac{1}{1024}\big(1300075x^{13} - 4056234x^{11} + 4849845x^9 - 2771340x^7 + 765765x^5 \\
&\quad - 90090x^3 + 3003x\big) \\
&= \frac{1300075}{1024}x^{13} - \frac{2028117}{512}x^{11} + \frac{4849845}{1024}x^9 - \frac{692835}{256}x^7 + \frac{765765}{1024}x^5 \\
&\quad - \frac{45045}{512}x^3 + \frac{3003}{1024}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{14}(x) &= \frac{1}{2048}\big(5014575x^{14} - 16900975x^{12} + 22309287x^{10} - 14549535x^8 \\
&\quad + 4849845x^6 - 765765x^4 + 45045x^2 - 429\big) \\
&= \frac{5014575}{2048}x^{14} - \frac{16900975}{2048}x^{12} + \frac{22309287}{2048}x^{10} - \frac{14549535}{2048}x^8 + \frac{4849845}{2048}x^6 \\
&\quad - \frac{765765}{2048}x^4 + \frac{45045}{2048}x^2 - \frac{429}{2048}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{15}(x) &= \frac{1}{2048}\big(9694845x^{15} - 35102025x^{13} + 50702925x^{11} - 37182145x^{9} \\
&\quad + 14549535x^{7} - 2909907x^{5} + 255255x^{3} - 6435x\big) \\
&= \frac{9694845}{2048}x^{15} - \frac{35102025}{2048}x^{13} + \frac{50702925}{2048}x^{11} - \frac{37182145}{2048}x^{9} + \frac{14549535}{2048}x^{7} \\
&\quad - \frac{2909907}{2048}x^{5} + \frac{255255}{2048}x^{3} - \frac{6435}{2048}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{16}(x) &= \frac{1}{32768}\big(300540195x^{16} - 1163381400x^{14} + 1825305300x^{12} - 1487285800x^{10} \\
&\quad + 669278610x^{8} - 162954792x^{6} + 19399380x^{4} - 875160x^{2} + 6435\big) \\
&= \frac{300540195}{32768}x^{16} - \frac{145422675}{4096}x^{14} + \frac{456326325}{8192}x^{12} - \frac{185910725}{4096}x^{10} \\
&\quad + \frac{334639305}{16384}x^{8} - \frac{20369349}{4096}x^{6} + \frac{4849845}{8192}x^{4} - \frac{109395}{4096}x^{2} + \frac{6435}{32768}
\end{aligned}
$$

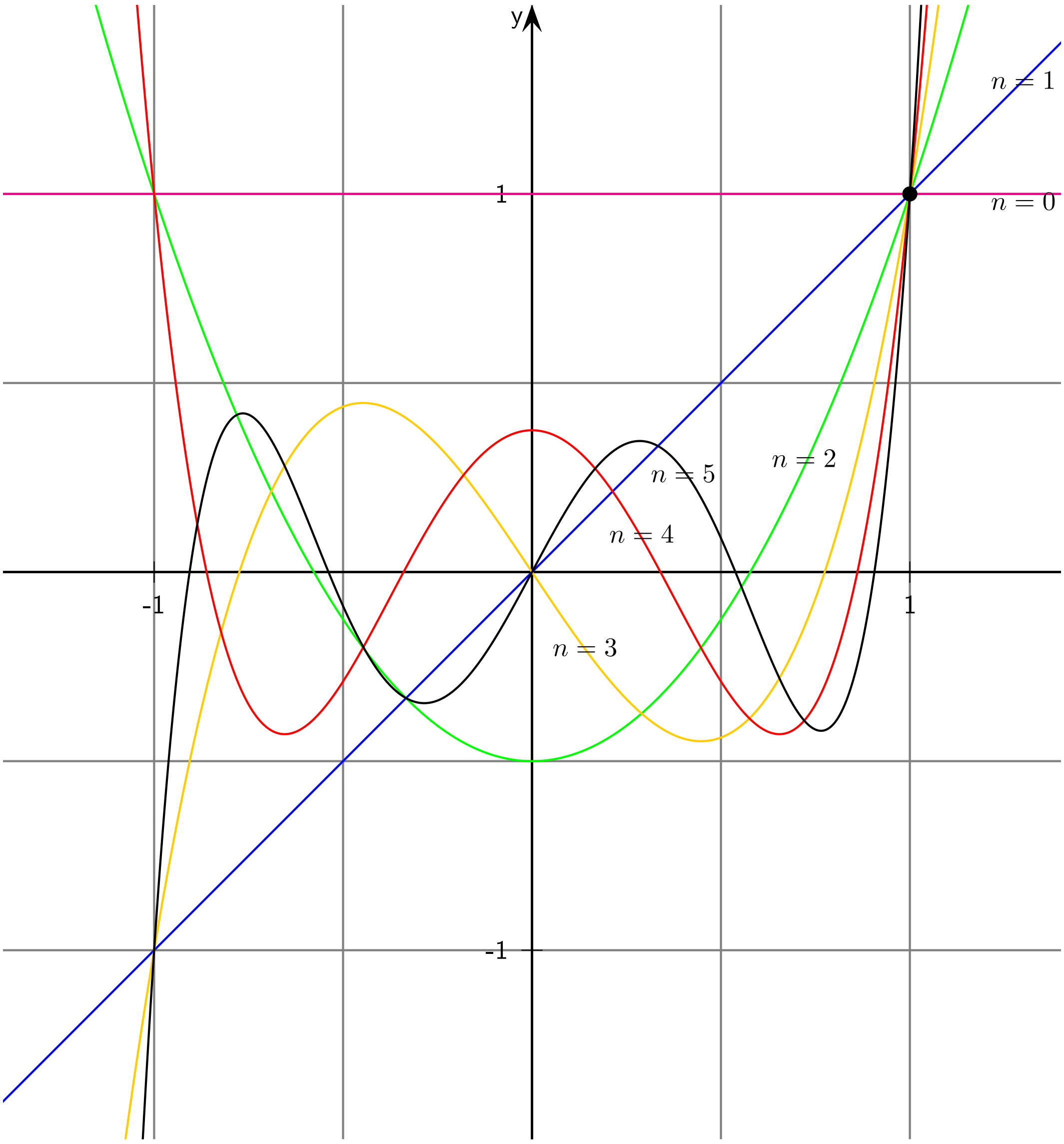
$$
\begin{aligned}
P_{17}(x) &= \frac{1}{32768}\big(583401555x^{17} - 2404321560x^{15} + 4071834900x^{13} - 3650610600x^{11} \\
&\quad + 1859107250x^{9} - 535422888x^{7} + 81477396x^{5} - 5542680x^{3} + 109395x\big) \\
&= \frac{583401555}{32768}x^{17} - \frac{300540195}{4096}x^{15} + \frac{1017958725}{8192}x^{13} - \frac{456326325}{4096}x^{11} \\
&\quad + \frac{929553625}{16384}x^{9} - \frac{66927861}{4096}x^{7} + \frac{20369349}{8192}x^{5} - \frac{692835}{4096}x^{3} + \frac{109395}{32768}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{18}(x) &= \frac{1}{65536}\big(2268783825x^{18} - 9917826435x^{16} + 18032411700x^{14} \\
&\quad - 17644617900x^{12} + 10039179150x^{10} - 3346393050x^{8} + 624660036x^{6} \\
&\quad - 58198140x^{4} + 2078505x^{2} - 12155\big) \\
&= \frac{2268783825}{65536}x^{18} - \frac{9917826435}{65536}x^{16} + \frac{4508102925}{16384}x^{14} - \frac{4411154475}{16384}x^{12} \\
&\quad + \frac{5019589575}{32768}x^{10} - \frac{1673196525}{32768}x^{8} + \frac{156165009}{16384}x^{6} - \frac{14549535}{16384}x^{4} \\
&\quad + \frac{2078505}{65536}x^{2} - \frac{12155}{65536}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{19}(x) &= \frac{1}{65536}\big(4418157975x^{19} - 20419054425x^{17} + 39671305740x^{15} \\
&\quad - 42075627300x^{13} + 26466926850x^{11} - 10039179150x^{9} + 2230928700x^{7} \\
&\quad - 267711444x^{5} + 14549535x^{3} - 230945x\big) \\
&= \frac{4418157975}{65536}x^{19} - \frac{20419054425}{65536}x^{17} + \frac{9917826435}{16384}x^{15} - \frac{10518906825}{16384}x^{13} \\
&\quad + \frac{13233463425}{32768}x^{11} - \frac{5019589575}{32768}x^{9} + \frac{557732175}{16384}x^{7} - \frac{66927861}{16384}x^{5} \\
&\quad + \frac{14549535}{65536}x^{3} - \frac{230945}{65536}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{20}(x) &= \frac{1}{262144}\big(34461632205x^{20} - 167890003050x^{18} + 347123925225x^{16} \\
&\quad - 396713057400x^{14} + 273491577450x^{12} - 116454478140x^{10} \\
&\quad + 30117537450x^{8} - 4461857400x^{6} + 334639305x^{4} - 9699690x^{2} + 46189\big) \\
&= \frac{34461632205}{262144}x^{20} - \frac{83945001525}{131072}x^{18} + \frac{347123925225}{262144}x^{16} - \frac{49589132175}{32768}x^{14} \\
&\quad + \frac{136745788725}{131072}x^{12} - \frac{29113619535}{65536}x^{10} + \frac{15058768725}{131072}x^{8} - \frac{557732175}{32768}x^{6} \\
&\quad + \frac{334639305}{262144}x^{4} - \frac{4849845}{131072}x^{2} + \frac{46189}{262144}
\end{aligned}
$$

B. Graphen der ersten Legendre-Polynome



C. Quellen

[GF2] Hans Grauert, Wolfgang Fischer, Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag 1968

[Sm32] W. I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil III/2 (Übersetzung), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982

[WP] `https://de.wikipedia.org/wiki/Legendre-Polynom`, zuletzt aufgerufen am 19. Mai 2019