Achsensymmetrie von Graphen ganzrationaler Funktionen 4. Grades

Walter Fendt, 4. Dezember 2016

Zu den Standardaufgaben der Schulmathematik gehört die Untersuchung von Funktionsgraphen auf Symmetrie. Besonders einfach sind solche Aufgaben bei ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) niedrigen Grades.

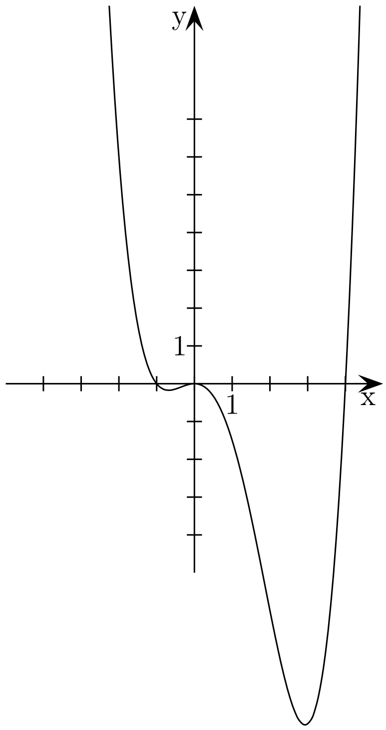
Lineare Funktionen (also solche vom Grad 1) und konstante Funktionen (Grad 0) haben jeweils eine Gerade als Graph; die Frage nach Symmetrieeigenschaften wäre in diesen Fällen ein wenig albern.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (auch als quadratische Funktion bezeichnet) ist immer eine Parabel und besitzt eine zur y-Achse parallele Symmetrieachse. Die Gleichung dieser Achse findet man zum Beispiel dadurch heraus, dass man die Ableitung gleich 0 setzt und nach x auflöst.

Der Graph einer Funktion 3. Grades (einer kubischen Funktion) ist immer punktsymmetrisch. Symmetriezentrum ist jeweils der Wendepunkt; um diesen zu bestimmen, setzt man standardmäßig die 2. Ableitung gleich 0 und löst nach x auf; anschließend erhält man die y-Koordinate durch Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung.

Erst bei den ganzrationalen Funktionen 4. Grades wird es interessanter. Deren Graphen können zwar achsensymmetrisch sein, aber im Allgemeinen liegt hier keine Symmetrie vor, wie am folgenden Beispiel zu erkennen ist:

Beispiel 1: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - x^2$



Es stellt sich nun die nahe liegende Frage:

> Welche ganzrationale Funktionen 4. Grades
>
> $$f:\ x \mapsto a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$
>
> haben achsensymmetrische Graphen?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir zunächst an, dass eine solche Symmetrie vorliegt, dass es also eine Symmetrieachse mit der Gleichung $x = s$ gibt. Der einfachste Ansatz für die Funktionsgleichung ist

$$f(x) = A(x-s)^4 + B(x-s)^2 + C,$$

wobei die Koeffizienten A, B und C noch zu bestimmen wären.

Durch Verwendung binomischer Formeln (Pascalsches Dreieck!) und Ausmultiplizieren lässt sich dieser Ansatz umformen zu

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x^4 - 4x^3s + 6x^2s^2 - 4xs^3 + s^4) + B(x^2 - 2xs + s^2) + C \\ &= Ax^4 - 4Asx^3 + 6As^2x^2 - 4As^3x + As^4 + Bx^2 - 2Bsx + Bs^2 + C. \end{aligned}$$

Sinnvollerweise ordnet man die Summanden nach den Exponenten von x:

$$f(x) = Ax^4 - 4Asx^3 + (6As^2 + B)x^2 + (-4As^3 - 2Bs)x + (As^4 + Bs^2 + C) \tag{2}$$

Die Ansätze (1) und (2) sollen dieselbe Funktion beschreiben. Das ist nur möglich, wenn die Koeffizienten von x^4, x^3, $\ldots$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned} a_4 &= A && (3)\\ a_3 &= -4As && (4)\\ a_2 &= 6As^2 + B && (5)\\ a_1 &= -4As^3 - 2Bs && (6)\\ a_0 &= As^4 + Bs^2 + C && (7) \end{aligned}$$

(Die letzte dieser Bedingungen ist für unser Problem nicht relevant. Eine Änderung von a_0 beziehungsweise C entspricht nämlich einer Verschiebung des Graphen parallel zur y-Achse und hat daher keinen Einfluss auf die Achsensymmetrie.)

Im Folgenden sollen die Variablen s, A, B und C mit dem Einsetzverfahren eliminiert werden, um eine Beziehung zwischen a_4, a_3, a_2 und a_1 zu erhalten.

Auflösen von (4) nach s ergibt unter Berücksichtigung von (3):

$$s = \frac{a_3}{-4A} = -\frac{a_3}{4a_4} \tag{8}$$

Als nächstes löst man Gleichung (5) nach B auf und setzt (8) ein:

$$\begin{aligned} B &= a_2 - 6As^2\\ &= a_2 - 6a_4\left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^2\\ &= a_2 - \frac{3{a_3}^2}{8a_4} && (9) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3), (8) und (9) in (6) lässt sich folgern:

$$\begin{aligned} a_1 &= -4As^3 - 2Bs\\ &= -4a_4\left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^3 - 2\left(a_2 - \frac{3{a_3}^2}{8a_4}\right)\left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)\\ &= \frac{{a_3}^3}{16{a_4}^2} + \frac{a_2a_3}{2a_4} - \frac{3{a_3}^3}{16{a_4}^2}\\ &= -\frac{{a_3}^3}{8{a_4}^2} + \frac{a_2a_3}{2a_4} && (10) \end{aligned}$$

Bringt man alle Summanden auf eine Seite, so lautet die Bedingung

$$a_1 + \frac{{a_3}^3}{8{a_4}^2} - \frac{a_2a_3}{2a_4} = 0.$$

Übersichtlicher wird das Ergebnis, wenn man mit $8{a_4}^2$ multipliziert, um Brüche zu vermeiden:

$$8a_1{a_4}^2 + {a_3}^3 - 4a_2a_3a_4 = 0 \tag{11}$$

Bisher wurde bewiesen, dass für eine ganzrationale Funktion 4. Grades mit achsensymmetrischem Graphen die zuletzt genannte Bedingung erfüllt sein muss (notwendige Bedingung). Die gemachten Schlüsse sind aber auch umkehrbar; die gefundene Bedingung ist also auch hinreichend. Damit ist unser Problem gelöst:

Ergebnis: Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades mit der Gleichung

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit } a_4 \neq 0$$

ist genau dann achsensymmetrisch, wenn die Koeffizienten folgende Bedingung erfüllen:

$$\boxed{8a_1{a_4}^2 + {a_3}^3 - 4a_2a_3a_4 = 0}$$

Ist diese Bedingung richtig, so ist $x = -\dfrac{a_3}{4a_4}$ die Gleichung der Symmetrieachse.

Probieren wir dieses Kriterium gleich einmal am Beispiel 1 aus!

$$8 \cdot 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{21}{64} \neq 0$$

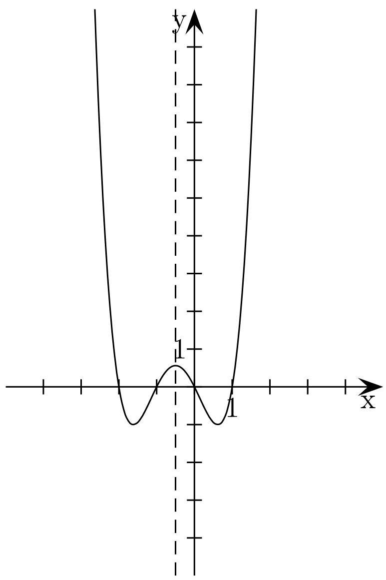
Das Ergebnis ist ungleich 0, wie bei einem nicht symmetrischen Graphen zu erwarten.

Beispiel 2: $g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

Die Rechnung für dieses Beispiel lautet:

$$8 \cdot (-2) \cdot 1^2 + 2^3 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

Dieses Mal kommt 0 heraus; demnach müsste ein achsensymmetrischer Funktionsgraph vorliegen, was durch die folgende Skizze bestätigt wird.



Auch die Lage der Symmetrieachse stimmt mit der Vorhersage überein: $x = -\dfrac{2}{4 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2}$